نوموټوليپ‌څخه زاويې چې د راکړل شوي معادلې جذرونه دي ، عبارت دي له ،

$X = n\pi + n\pi$ يا $X = 2n\pi$

د $tg X = 2$ معادلې د حل لپاره د مثلثاتي نسبتونو له جدول څخه استفاده کوو.

اتم سوال : لاندې معادله حل کړئ : $2\sin^2 X + \cos^2 X - \sin X \cos X = 1$

حل : د فیثاغورث د قضیې په اساس $(\sin^2 X + \cos^2 X = 1)$ پورتنۍ معادله داسې لیکلای شو چې :

$1 + \sin^2 X - \frac{1}{2}\sin 2X = 1$

$\Longrightarrow \frac{1-\cos 2X}{2} - \frac{\sin 2X}{2} = 0 \Longrightarrow \cos 2X + \sin 2X = 1$

$\Longrightarrow \sin 2X + tg\,\pi/4 \cos 2X = 1 \Longrightarrow \sin 2X \cos \pi/4 + \cos 2X \sin \pi/4 \cos \pi/4$

$\Longrightarrow \sin(2X + \pi/4) = \sqrt{2}/2 \Longrightarrow a = \pi/4$

نوموټوليپ‌څخه زاويې چې د راکړل شوي معادلې جذرونه دي عبارت دي له ؛

$2X + \pi/4 = n\pi + (-1)^n \pi/4$ يا $X = \frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n \pi/4 - \pi/4]$

نهم سوال : د لاندې معادلې جذرونه وټاکئ :

$3\sin^2 X + \cos^2 X - \sqrt{6}\sin X \cos X = \frac{7}{4}$

حل : څرنګه چې $\sin^2 X + \cos^2 X = 1$ نو راکړل شوي معادله داسې لیکلای شو ،

$2\sin^2 X + 1 - \sqrt{6}/2 \sin 2X = \frac{7}{4}$

$2 \cdot \frac{1-\cos 2X}{2} + 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin 2X = \frac{7}{4}$

$-\cos 2X - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin 2X = \frac{7}{4} - 2$

$+\cos 2X + \frac{\sqrt{6}}{2}\sin 2X = \frac{1}{4}$

$4\cos 2X + 2\sqrt{6}\sin 2X = 1$

$4 \cdot \frac{1 - tg^2 X}{1 + tg^2 X} + 2\sqrt{6} \cdot \frac{2\,tg X}{1 + tg^2 X} = 1$

$$4-4\,tg^2X+4\sqrt{6}\,tgX=1+tg^2X \Longrightarrow 5\,tg^2X-4\sqrt{6}\,tgX-3=0$$

$$\Delta'=24+15=39 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (tgX)_1=\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{39}}{5}=\frac{2\cdot 2,45+6,24}{5}=2,22800\ \dots\ I$$

$$(tgX)_2=\frac{2\cdot 2,25-6,24}{5}=\frac{4,90-6,24}{5}=-0,268\ \dots\ II$$

د I او II لمبر معادلو دحل لپاره دمثلثاتي نسبتونو د جدول څخه استفاده کوو.

لسم سوال : دلاندې معادلې جذرونه تعين کړئ :

$$Sin^2X-Cos^2X+2\,SinX\,CosX=1$$

حل : ددوچنده زاويو دمثلثاتي نسبتونو په اساس پورتنۍ معادله داسې ليکلای شو :

$$-Cos\,2X+Sin\,2X=1 \Longrightarrow Sin\,2X+(-1)\,Cos\,2X=1$$

پوهېږو چې $-1=tg\frac{3\pi}{4}$ نو په پورتنۍ معادله کې د(1-) قيمت وضع کوو، ليکلای شو چې :

$$Sin\,2X+tg\frac{3\pi}{4}Cos\,2X=1$$

$$\Longrightarrow Sin\,2X\,Cos\frac{3\pi}{4}+Cos\,2X\,Sin\frac{3\pi}{4}=Cos\frac{3\pi}{4}$$

څرنګه چې $Cos\frac{3\pi}{4}=-Sin\frac{\pi}{4}$ نو

$$Sin(2X+\tfrac{3\pi}{4})=Sin(-\tfrac{\pi}{4}) \Longrightarrow a=-\tfrac{\pi}{4}$$

نو متولې هغه زاويې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$$2X+\tfrac{3\pi}{4}=n\pi+(-1)^n(-\tfrac{\pi}{4}) \Longrightarrow X=\tfrac{1}{2}\left[n\pi-(-1)^n\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{3\pi}{4}\right]$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

اتم تمرین

لومړی سوال: لاندې معادله حل کړئ:

$4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3} = 0$

حل: پورتنۍ معادله نظر $\cos x$ ته یو مجهوله درجه دوهمه معادله .نو قاسمه یې تشکیلوو، یعنې:

$\Delta = [-(\sqrt{3}+1)]^2 - 4\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3}+1)^2 - 4\sqrt{3} \quad = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} \quad = (\sqrt{3}-1)^2$

$\Longrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Longrightarrow a = \pi/6$ یا $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{4} = 1/2 \Longrightarrow a = \pi/3$

نو ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$x = 2n\pi \pm \pi/6$ یا $x = 2n\pi \pm \pi/3$

دوهم سوال: د لاندې معادلې حل په لاس راوړئ:

$(2\sin x + 1)^2 = 5 - 3\tg^2 x$

حل: $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = \dfrac{5\cos^2 x - 3\sin^2 x}{\cos^2 x}$

په هغه صورت کې چې $x \neq \pi/2$ لیکلای شو چې:

$$4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin x\cos^2 x + \cos^2 x = 5\cos^2 x - 3\sin^2 x$$

$$4\sin^2 x(1-\sin^2 x) + 4\sin x(1-\sin^2 x) + 1-\sin^2 x = 5-5\sin^2 x-3\sin^2 x$$

$$4\sin^2 x - 4\sin^2 x + 4\sin x - 4\sin^3 x - 1\sin^2 x = 5-8\sin^2 x$$

$$3\sin^2 x - 4\sin^2 x + 4\sin x - 4\sin^3 x + 1 = 5-8\sin^2 x$$

$$11\sin^2 x - 4\sin^4 x + 4\sin x - 4\sin^3 x - 4 = 0$$

$$4\sin^4 x + 4\sin^3 x - 11\sin^2 x - 4\sin x + 4 = 0$$

$$4\sin^4 x - 4\left(\tfrac12\right)^4 + 4\sin^3 x - 4\left(\tfrac12\right)^4 - 11\sin^2 x + \tfrac{3}{4} + 2 - 4\sin x + 4\left(\tfrac12\right) = 0$$

$$4\left(\sin^2 x - \tfrac14\right)\left[\sin^2 x - \left(\tfrac12\right)^2\right] + 4\left(\sin x - \tfrac12\right)\left(\sin^2 x + \tfrac12\sin x + \tfrac14\right)$$
$$-11\sin^2 x + \tfrac{11}{4} - 4\left(\sin x - \tfrac12\right) = 0$$

$$4\left(\sin^2 x + \tfrac14\right)\left(\sin x + \tfrac12\right)\left(\sin x - \tfrac12\right) + 4\left(\sin x - \tfrac12\right)\left(\sin^2 x + \tfrac12\sin x + \tfrac14\right)$$
$$-11\left(\sin x - \tfrac12\right)\left(\sin x + \tfrac12\right) - 4\left(\sin x - \tfrac12\right) = 0$$

$$\left(\sin x - \tfrac12\right)\left\{4\left(\sin^2 x + \tfrac14\right)\left(\sin x + \tfrac12\right) + 4\left(\sin^2 x + \tfrac12\sin x + \tfrac14\right) - 11\left(\sin x\right.\right.$$
$$\left.\left. + \tfrac12\right) - 4\right\} = 0$$

$$\left(\sin x - \tfrac12\right)\left[4\sin^3 x + 6\sin^2 x - 8\sin x - 8\right] = 0$$

$$\left(\sin x - \tfrac12\right)\left\{2\sin^3 x + 4\sin^2 x + 2\sin^3 x - 8\sin x + 2\sin^2 x - 8\right\} = 0$$

$$\left(\sin x - \tfrac12\right)\left\{2\sin^2 x(\sin x + 2) + 2\sin x(\sin x + 2)(\sin x - 2) +\right.$$
$$\left.2(\sin x - 2)(\sin x + 2)\right\} = 0$$

$$\left(\sin x - \tfrac12\right)(\sin x + 2)(4\sin^2 x - 2\sin x - 4) = 0$$

$$\Longrightarrow \sin x = \tfrac12 \cdots I \;,\; \sin x = -2 \cdots II \;,\; 2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0 \cdots III$$

د لمړي نمبر معادله حل نلري ، دویم نمبر معادله هم حل نلري ځکه چې $-1 \le \sin x \le 1$

دریپیرسوال : دلاندې معادلې جذرونه تعین کړئ : $tg^2x - tgx - 2 = 0$

حل : داکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو : $tg^2x - 1 - tgx - 1 = 0$

$(tgx-1)(tgx+1) - (tgx+1) = 0$ یا $(tgx+1)(tgx-2) = 0$

$\Longrightarrow tgx = -1 \; . . . I$ یا $tgx = 2 \; . . . II$

د I رابطې څخه هغه زاویه چې tg یې (-1) دی $\frac{3\pi}{4}$ ده. د II معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې (2) دی په جدول کښې $63^\circ\ 26'$ ده ، نو ټولې هغه زاویې چې داکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$x = n\pi + 3\pi/4$ او $x = n \cdot 180^\circ + 63^\circ\ 26'$

څلورم سوال : لاندې معادله حل کړئ . $16\cos^4x - 20\cos^2x + 5 = 0$

حل : په داکړل شوې معادله کې $\cos^2x = t$ وضع کوو ، لاندې شکل غوره کوی .

$16t^2 - 20t + 5 = 0$

وروسته له حل څخه : $t_1 = 0{,}9046$ او $t_2 = 0{,}3460$

پس : $\sqrt{t_1} = 0{,}9511 \; . . . I$ او $\sqrt{t_2} = 0{,}5882 \; . . . II$

اوس په I او II رابطو کې د t قیمت یعنې $\cos^2x$ وضع کوو په لاس راځی چې : $\cos x = 0{,}9511 \; . . . . III$ یا $\cos x = 0{,}5882 \; . . . . IV$

هغه زاویه چې $\cos$ یې $0{,}5882$ دی د جدول څخه د 54° په شاوخوا کې په لاس راوړے شو . او هغه زاویه چې $\cos$ یې $0{,}9511$ دی 18° ده ، نو ټولې هغه زاویې چې داکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$x = 2n \cdot 180^\circ \pm 54^\circ$

یا $x = 2n \cdot 180^\circ \pm 18^\circ$

$4\cos x = -2 \Longrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = 2\pi/3$

نوموړې هغه زاويې چې دپورتنۍ معادلې جذرونه دي عبارت دي له :

$x = 2n\pi \pm a \;,\; x = 2n\pi \pm n\pi \qquad n \in \{1, 3, 5, \cdots\}$

$x = 2n\pi \pm \pi/3 \;,\; x = 2n\pi \pm 2\pi/3$

پنځم سوال، لاندې معادله حل کړئ .

$8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1 = 0$

حل: راکړل شوې معادله داسې هم ليکلای شو: $\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{8} = 0$

$\Longrightarrow (\sin^2 x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8} = 0 \qquad \Longrightarrow (\sin^2 x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2\sqrt{2}})^2 = 0$

$\Longrightarrow (\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})(\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}) = 0$

$\Longrightarrow \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$ يا $\sin^2 x = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots \; II$

$\sin^2 x = \frac{2,411}{2,822} \Longrightarrow \sin x = \pm 0,9243 \cdots\cdots I$

يا $\sin x = \pm 0,3822$

د I او II لمبر معادلو څخه په ترتيب سره هغه زاويه چې Sin يې 0,9243 دی $68^\circ 42'$ ده او هغه زاويه چې Sin يې 0,3822 دی $21^\circ 3' 48''$ ده

نوموړې هغه زاويې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له :

$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 68^\circ 42'$ يا $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 21^\circ 3' 48''$

شپږم سوال : دلاندې معادلې جذرونه تعين کړئ :

$\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

حل: په راکړل شوې معادله کې د $\sqrt{3}$ قيمت $\cot \pi/6$ وضع کوو ليکو چې :

$\sin x \cos \pi/6 - \cos x \sin \pi/6 = \sqrt{2} \sin \pi/6 \Longrightarrow \sin(x - \pi/6) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

هغه زاویه چې Sin یې $\frac{\sqrt{2}}{2}$ دی $\pi/4$ نو لیکلای شو چې : $x - \pi/6 = \pi/4$

نو ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$x - \pi/6 = n\pi + (-1)^n \pi/4$ یا $x = n\pi + (-1)^n \pi/4 + \pi/6$

اووم سوال : لاندې معادله حل کړئ : $\sin 9x = \sin x$

حل : پورتنۍ معادله داسې هم لیکلای شو: $\sin 9x - \sin x = 0$

اوس د ضرب د فرمولونو څخه داستفادې په صورت کې لیکو چې :

$$2\cos\frac{9x+x}{2}\sin\frac{9x-x}{2} = 0 \implies \cos\frac{10x}{2}\sin\frac{8x}{2} = 0$$

$$\implies \cos 5x = 0 \implies a = \pi/2 \quad \cdots I$$

یا $\sin x = 0 \implies a = n\pi, \; n \in IN \cup \{0\}$

پس ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له:

1/ $5x = 2n\pi \pm \pi/2$ یا $x = \frac{1}{5}[2n\pi \pm \pi/2]$

2/ $4x = n\pi + (-n)^n \cdot n\pi$ یا $x = \frac{n\pi}{4}[1 + (-1)^n]$

اتم سوال : د لاندې معادلې جذرونه تعین کړئ: $\cos 5\theta = \cos 4\theta$

حل : نوموړې معادله داسې هم لیکلای شو: $\cos 5\theta - \cos 4\theta = 0$

د ضرب د فارمولونو څخه داستفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$-2\sin\frac{5\theta+4\theta}{2}\sin\frac{5\theta-4\theta}{2} = 0 \implies \sin\frac{9\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = 0$$

1/ $\implies \sin\frac{9\theta}{2} = 0 \implies a = n\pi, \; n \in IN \cup \{0\}$

2/ $\sin\frac{\theta}{2} = 0 \implies a = n\pi$, //

پس ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له ،

$$\frac{9\theta}{2} = n\pi + (-1)^n n\pi \implies \theta = \frac{2n\pi}{9}\{1 + (-1)^n\}$$

$\theta/2 = n\pi + (-1)^n n\pi \Longrightarrow \theta = 2n\pi\{1+(-1)^n\}$ او

نهم سوال: دلاندې معادلې حل په لاس را وړئ: $tg\,3\theta = Cotg\,\theta$

حل: راکړل شوې معادله دارنګه هم لیکلای شو: $tg\,3\theta - Cotg\,\theta = 0$

په دې شرط چې $Sin\,\theta \neq 0$ او $Cos\,\theta \neq 0$ وي $\frac{Sin\,3\theta}{Cos\,3\theta} - \frac{Cos\,\theta}{Sin\,\theta} = 0$

$\Longrightarrow Sin\,\theta\,Sin\,3\theta - Cos\,3\theta\,Cos\,\theta = 0$

$\Longrightarrow -(Cos\,3\theta\,Cos\,\theta - Sin\,3\theta\,Sin\,\theta) = 0 \Longrightarrow -Cos(3\theta+\theta) = 0$

$\Longrightarrow Cos(4\theta) = 0 \Longrightarrow \alpha = \pi/2$

نو دنوموړې معادلې ټول حلونه عبارت دي له: $4\theta = 2n\pi \pm \pi/2$

یا $\theta = 1/4\,[2n\pi \pm \pi/2]$

لسم سوال: دمعادلو لاندې سیستم حل کړئ:
$$\begin{cases} x+y = \pi/4 \\ tg\,x + tg\,y = 1 \end{cases}$$

حل: دپورتنی سیستم دویمه معادله دارنګه هم لیکلای شو:

$\frac{Sin(x+y)}{Cos\,x\,Cos\,y} = 1 \Longrightarrow Sin(x+y) = Cos\,x\,Cos\,y$

$\Longrightarrow Sin(x+y) = \frac{1}{2}\,[Cos(x+y) + Cos(x-y)]$

$\Longrightarrow 2\,Sin(x+y) - Cos(x+y) = Cos(x-y)$

$\Longrightarrow Cos(x-y) = 2\,Sin(x+y) - Cos(x+y)$

اوس نو په لاس راغلې معادله کې د $x+y = \pi/4$ قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$Cos(x-y) = 2\,Sin\,\pi/4 - Cos\,\pi/4 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow x-y = \pi/4$

څرنګه چې لرو $x+y = \pi/4$ او همدارنګه پلاس راوړو چې $x-y = \pi/4$، اوس نو

دواړه معادلې حل کوو یعنې :

$$x+y=\pi/4 \quad \ldots\ I$$
$$x-y=\pi/4 \quad \ldots\ II$$
$$\xrightarrow{I+II} 2x=2\cdot\pi/4 \Rightarrow x=\pi/4$$

اوس په I لمبر معادله کې د (x) قیمت وضع کوو په لاس راځي چې :

$$\pi/4+y=\pi/4 \Longrightarrow y=0$$

یوولسم سوال، دلاندې سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} x-y=\pi/3 & \ldots\ I \\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=2 & \ldots\ II \end{cases}$$

حل: دنوموړي سیستم دویم لمبر معادله داسې هم لیکلای شو :

(دتناسب دیوه خاصیت څخه داستفادې په صورت کې) $\dfrac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=3 \quad \ldots$

د ضرب دفرمولونو څخه د استفادې په اساس لیکو چې :

$$\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}=3 \Longrightarrow tg\frac{x+y}{2}\cdot ctg\frac{x-y}{2}=3$$

څرنګه چې $tg\frac{x-y}{2}\neq 0$ ، نوپورتنۍ معادله داسې لیکلای شو :

$$tg\frac{x+y}{2}=3\,tg\frac{x-y}{2}$$

څرنګه چې $x-y=\pi/3$ نولیکلای شو چې :

$$tg\frac{x+y}{2}=3\,tg\frac{\pi/3}{2}$$
$$\Longrightarrow tg\frac{x+y}{2}=3\,tg\,\pi/6=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

پوهیږو چې هغه زاویه چې tg یې $\sqrt{3}$ دی $\pi/3$ ده، نو :

$$\frac{x+y}{2}=\pi/3 \Longrightarrow x+y=2\pi/3$$

لروچې $x-y=\pi/3$ او هم مو په لاس راوړ چې $x+y=2\pi/3$ ، اوس دوا ړه معادلې حل کوو :

$$x-y=\pi/3 \quad \ldots\ III$$
$$x+y=2\pi/3 \quad \ldots\ IV$$
$$\xrightarrow{+} 2x=\pi/3+2\pi/3=3\pi/3 \Rightarrow x=\pi/2$$

$$y=\pi/2-\pi/3 \Rightarrow y=\pi/6$$

دولسم سوال : دمعادلو لاندې سیستم حل کړئ :

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \cos x \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

حل : دنوموړې سیستم لمړۍ معادله داسې هم لیکلای شو :

$$\cos y = -\sin x = \sin(-x) = \cos(\pi/2 + x)$$

څرنګه چې $\cos y = \cos(\pi/2 + x) \Longrightarrow y = \pi/2 + x$

دضرب دفرمولونو دتطبیق په اساس دوهمه معادله داسې لیکلای شو :

$$\frac{1}{2}\{\sin(x+y) - \sin(x-y)\} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \sin(x+y) - \sin(x-y) = -1$$

اوس په لاس راغلې معادله کې د y قیمت $\pi/2 + x$ وضع کوو ، لیکو چې :

$$\sin(\pi/2 + 2x) - \sin(-\pi/2) = -1 \Longrightarrow \sin(\pi/2 + 2x) = -2$$

څرنګه چې $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ یعنې هیڅکله 2- نشي کیدای ، نو راکړل شوی سیستم حل نلري .

دیارلسم سوال : د لاندې سیستم حل په لاس راوړئ :

$$\begin{cases} x + y = 2\pi/3 \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حل : دراکړل شوی سیستم دوهم لمبر معادله د ضرب د فرمولونو دتطبیق په اساس داړنګه لیکو :

$$\frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1$$

اوس په لاس راغلې معادله کې د $x+y$ مساوي قیمت $2\pi/3$ وضع کوو ، لیکلای شو چې :

$$\cos 2\pi/3 + \cos(x-y) = 1 \Longrightarrow \cos(x-y) = 3/2$$

څرنګه چې $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ یعنې د (۱) څخه هیڅکله نشي لوئیدلای نو راکړل شوی سیستم حل نلري .

نهم سوال: ثبوت کړئ چې: $\frac{1}{\sec a - tg\, a} = \sec a + tg\, a$

حل: د راکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې د $tg\, a$ او $\sec a$ قیمتونه وضع کوو:

$$\frac{1}{\sec a - tg\, a} = \frac{1}{\frac{1}{\cos a} - \frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{1}{\frac{1-\sin a}{\cos a}}$$

$$= \frac{\cos a}{1-\sin a} = \frac{(1+\sin a)(\cos a)}{1-\sin^2 a} = \frac{(1+\sin a)\cos a}{\cos^2 a}$$

$$= \frac{1}{\cos a} + \frac{\sin a}{\cos a} = \sec a + tg\, a$$

لسم سوال: ثبوت کړئ چې: $\frac{1-tg\, a}{1+tg\, a} = \frac{cotg\, a-1}{cotg\, a+1}$

حل: د راکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې د $tg\, a$ مساوی قیمت $(\frac{1}{cotg\, a})$ وضع کوو، لیکو چې:

$$\frac{1-tg\, a}{1+tg\, a} = \frac{1-\frac{1}{cotg\, a}}{1+\frac{1}{cotg\, a}}$$

$$= \frac{\frac{cotg\, a-1}{cotg\, a}}{\frac{cotg\, a+1}{cotg\, a}} = \frac{cotg\, a-1}{cotg\, a}\cdot\frac{cotg\, a}{cotg\, a+1} = \frac{cotg\, a-1}{cotg\, a+1}$$

یوولسم سوال: ثبوت کړئ چې: $\frac{1}{1+tg^2 a} + \frac{1}{1+cot^2 a} = 1$

حل: څرنګه چې $1+tg^2 a = \sec^2 a$ او $1+cotg^2 a = cosec^2 a$ نو د راکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې د هغوی مساوی قیمتونه وضع کوو، لیکلای شو چې:

$$\frac{1}{1+tg^2 a} + \frac{1}{1+cotg^2 a} = \frac{1}{\sec^2 a} + \frac{1}{cosec^2 a}$$

$$= \cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

دولسم سوال: ثبوت کړئ چې: $(cot\, a-1)^2 + (cot\, a+1)^2 = 2\, cosec^2 a$

د نوموړی مطابقت چپ اړخ د a^2+b^2 شکل لري، څرنګه چې: $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

څوارلسم سوال، د لاندې سیستم حل په لاس راوړئ :
$$\begin{cases} \sin(x+y)=\cos(x-y) \\ \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=1 \end{cases}$$

حل، په راکړل شوی سیستم کې اوله معادله داسې هم لیکلای شو :

$$\sin(x+y)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-(x-y)\right] \Longrightarrow x+y=\frac{\pi}{2}-x+y$$
$$\Longrightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

دد دویم لمبر معادلې څخه لیکلای شو چې : $\operatorname{tg} y=\operatorname{tg} x-1 \Longrightarrow \operatorname{tg} y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-1$

$$\Longrightarrow \operatorname{tg} y=0 \qquad \Longrightarrow y=n\pi \quad , n\in\{0,1,2,3,\cdots\}$$

پنځلسم سوال : لاندې سیستم حل کړئ :
$$\begin{cases} \sin 2x=\cos y \cdots\cdots I \\ \operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} 2y=-1\cdots\cdots II \end{cases}$$

حل : دویم لمبر معادله داسې هم لیکلای شو : $\dfrac{\sin x\cdot\sin 2y}{\cos x\cos 2y}=-1$

د همدې معادلې څخه لیکلای شو چې :

$$\sin x\sin 2y=-\cos x\cos 2y \cdots\cdots$$ (په دې شرط چې $x\neq\frac{\pi}{2}$ او $y\neq\frac{\pi}{4}$ وي)

د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې د پورتنۍ معادلې څخه لیکلای شو چې :

$$\frac{1}{2}\{\cos(x-2y)-\cos(x+2y)\}=-\frac{1}{2}\{\cos(x+2y)+\cos(x-2y)\}$$
$$\Longrightarrow 2\cos(x-2y)=0 \qquad \Longrightarrow x-2y=\frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad x=\frac{\pi}{2}+2y$$

اوس د x قیمت د $\sin 2x=\cos y$ په معادله کې وضع کوو، لیکلای شو چې :

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+2y\right)=\cos y \Longrightarrow \sin(\pi+4y)=\cos y \Longrightarrow -\sin 4y=\cos y$$
$$\Longrightarrow \sin(-4y)=\cos y \qquad \Longrightarrow \sin(-4y)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$$
$$\Longrightarrow -4y=\frac{\pi}{2}-y \qquad \Longrightarrow y=-\frac{\pi}{6}$$

اوس د y قیمت د $x-2y=\frac{\pi}{2}$ په معادله کې وضع کوو x په لاس راځي :

$$x - 2\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

شپاړسم سوال: لاندې سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ tg(x+y) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

حل: د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه کولای شو چې د $x \hat{+} y$ زاویه په لاس راوړو:

$$tg(x+y) = 1,334$$

څرنګه چې د 1,334 عدد په جدول کې نشته نو د انترپولیشن څخه کار اخلو

زاویې را	تانجنتونه یې
$53^\circ\,10'$	1,335
$-53^\circ\,0'$	$-1,327$
$10'$	0,008

2/

$$\begin{array}{r} 1,334 \\ -1,327 \\ \hline 0,007 \end{array}$$

3/

$$10' \quad 8$$
$$x \quad 7$$
$$x = \left(\frac{7 \cdot 10}{8}\right)'$$
$$x = 8'\,45''$$

$$\Longrightarrow x + y = 53^\circ\,0' + 8'\,45'' \quad \text{یا} \quad \boxed{x + y = 53^\circ\,8'\,45''}$$

په دغه صورت کې چې $x \neq \frac{\pi}{2}$ او $y \neq \frac{\pi}{2}$ وي لومړۍ معادله داسې لیکلای شو:

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2}\left\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\right\}$$

$$\Longrightarrow 2\sin(x+y) - \cos(x+y) = \cos(x-y)$$

$$2\sin(53^\circ\,8'\,45'') - \cos(53^\circ\,8'\,45'') = \cos(x-y)$$

$53^\circ\,8'\,45''$ ساین او کوساین د انترپولیشن په واسطه په لاس راوړو.

1/

زاویې	sin یې
$53^\circ\,10'$	0,8004
$53^\circ\,0'$	$-0,7986$
$10'$	0,0018

2/

$$10' \quad 0,0018$$
$$8,75 \quad x$$
$$x = \frac{8,75 \cdot 0,0018}{10}$$
$$x = 0,0015750$$

$\Rightarrow \sin(53^\circ\ 8'\ 45'') = 0,7986 + 0,0016$

$\Rightarrow \sin 53^\circ\ 8'\ 45'' = 0,8002$

اوس د $53^\circ\ 8'\ 45''$ کوساین په لاس راوړو :

1/

زاویې	Cos یې
$53^\circ\ 10'$	0,5995
$53^\circ\ 6'$	0,6018
$10'$	0,0023

2/ $10'$ 0,0023

$8,75''$ X

$\Rightarrow X = \frac{8,75 \cdot 0,0023}{10} \Rightarrow X = 0,0020125$

3/ $0,6018$

$$\frac{-0,0021}{0,5997} \Rightarrow \cos 53^\circ\ 8'\ 45'' = 0,5997$$

$\Rightarrow \cos(x-y) = 2 \cdot 0,8002 - 0,5997$

$= 1,6004 - 0,5997 = 1,0007$

$\Rightarrow \cos(x-y) = 1,0007$

اوس د $x-y$ زاویه په لاس راوړو . څرنګه چې $\cos(x-y)$ ډېر نږدې یو (۱) ته دی نو : $x-y=0^\circ$ یا $x=y$

$\Rightarrow 2x = 53^\circ\ 8'\ 45'' \Rightarrow x = y = 26^\circ\ 19'\ 22'',5$

اوولسم سوال ، د معادلو لاندې سیستم حل کړئ :

$$\begin{cases} \cos^2 x = \sin^2 x \\ tg^2 x = tg\, y \end{cases}$$

حل : د اولې معادلې څخه لیکلای شو چې :

$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ یا $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$

او د x قیمت په دویمه معادله کښې وضع کوو، لیکو چې:

$$tg^2\frac{\pi}{4} = tg\,y \implies y = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \dots$$

اتلسم سوال: د معادلو لاندې سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} \sin x = 2\sin y \\ 3\cos(x+y) = 2\cos(x-y) \end{cases}$$

په هغه صورت کې چې $(y \neq n\pi, n \in \{0,1,2,3,\dots\})$ د لومړۍ معادلې څخه دا رنګه لیکلای شو: $\frac{\sin x}{\sin y} = 2$

د تناسب دیوه خاصیت په بنا په لاس راغلې معادله داسې لیکلای شو:

$$\frac{\sin(x)+\sin y}{\sin x-\sin y} = 3 \implies \frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = 3$$

$$\implies tg\frac{x+y}{2}\,\cot g\frac{x-y}{2} = 3 \implies tg\frac{x+y}{2} = 3\,tg\frac{x-y}{2}$$

د راکړل شوی سیستم دویمه معادله دا رنګه لیکلای شو:

$$\frac{3-3tg^2\frac{x+y}{2}}{1+tg^2\frac{x+y}{2}} = \frac{2-2tg^2\frac{x-y}{2}}{1+tg^2\frac{x-y}{2}} \implies \left(3-3tg^2\frac{x+y}{2}\right)\left(1+tg^2\frac{x-y}{2}\right)$$

$$= \left(2-2tg^2\frac{x-y}{2}\right)\left(1+tg^2\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\implies 3+3tg^2\frac{x-y}{2}-3tg^2\frac{x+y}{2}-3tg^2\frac{x+y}{2}\,tg^2\frac{x-y}{2}$$

$$= 2+2tg^2\frac{x+y}{2}-2tg^2\frac{x-y}{2}-2tg^2\frac{x-y}{2}\,tg^2\frac{x+y}{2}$$

$$\implies 3+3tg^2\frac{x-y}{2}-3\cdot 9tg^2\frac{x-y}{2} = 2+2\cdot 9tg^2\frac{x-y}{2}-2tg^2\frac{x-y}{2}-2\cdot 9tg^4\frac{x-y}{2}$$

$$1-24tg^2\frac{x-y}{2}-27tg^4\frac{x-y}{2} = 16tg^2\frac{x-y}{2}-18tg^4\frac{x-y}{2}$$

$$1-40tg^2\frac{x-y}{2}-9tg^4\frac{x-y}{2} = 0$$

یا $9tg^4\frac{x-y}{2}+40tg^2\frac{x-y}{2}-1 = 0$

په لاس راغلې معادله کې $tg^2\frac{x-y}{2} = z$ وضع کوو، لیکو چې:

$9z^2 + 40z - 1 = 0$

$\Delta = 400 + 9 = 409 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 20,224$

$\Rightarrow z_1 = \frac{-20 + 20,224}{9} \Rightarrow z_1 = 0,02498 \ldots I$

$z_2 = \frac{-40,224}{9} \ldots II$

اوس د z قیمتونه وضع کوو، یعني: $tg^2\frac{x-y}{2} = 0,02498 \Rightarrow tg\frac{x-y}{2} = 0,1578$

II لمبر معادله حل نلري ځکه چي $a + tg^2x \neq 0$ ...... $a \in \mathbb{R} - \{0\}$

اوس کولای شو د $\frac{x-y}{2}$ زاویه دجدول څخه په لاس راوړو. هغه زاویه چي tg

یې 0,1578 دی $8^\circ 58'$ ده $\Leftarrow$ $\frac{x-y}{2} = 8^\circ 58'$

$x - y = 16^\circ 116'$ یا $x - y = 17^\circ 56' \ldots I$

لسروچي $tg\frac{x+y}{2} = 3tg\frac{x-y}{2}$ اوس نو په رابطه کښې د $tg\frac{x-y}{2}$ قیمت وضع

کوو، یعني: $tg\frac{x+y}{2} = 3 \cdot 0,1578 \Rightarrow tg\frac{x+y}{2} = 0,4734$

بیا هم د مثلثاتي نسبتونو دجدول په کومک د $\frac{x+y}{2}$ زاویه په لاس راوړو، چي

عبارت ده له $25^\circ 20'$ څخه، نو $x + y = 50^\circ 40' \ldots II$

اوس I او II لمبر معادلې طرف په طرف جمع کوو، لیکو چي:

$2x = 68^\circ 36'$ $\qquad y = 34^\circ 18' - 17^\circ 56'$

$x = 34^\circ 18'$ $\qquad \Rightarrow y = 16^\circ 22'$

نولسم سوال: دمعادلو لاندې سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} \sin(3x - \pi/3) = \cos(y + \pi/6) \\ tg\, x = ctg\, 2y \end{cases}$$

حل: دراکړل شوي سیستم لومړۍ معادله دارنګه هم لیکلای شو:

$\cos(\pi/2 + \pi/3 - 3x) = \cos(y + \pi/6) \ldots$ (ځکه چي $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$)

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{6} - 3x = y + \frac{\pi}{6} \quad \dots \quad I$$

په همدې ډول د نوموړي سیستم دویمه معادله دارنګه لیکلای شو :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \quad \dots \quad \left(\text{ځکه چې } \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2y \quad \dots \quad II$$

اوس نو I او II لمبر معادلې حل کوو ،

د II معادلې څخه د x قیمت په I معادله کې وضع کوو ، یعنې :

$$\frac{5\pi}{6} - 3\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = y + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6} + 6y = y + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{4\pi}{6} + 6y = y + \frac{\pi}{6} \Rightarrow 5y = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

اوس په دویمه رابطه کې د y قیمت وضع کوو x په لاس راځي ، یعنې :

$$x = \frac{3\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

شلم سوال : لاندې سیستم حل کړئ :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې د نوموړي سیستم د لومړیه معادلې څخه لیکلای شو چې

$$2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x+y}{2}} \quad \dots \quad I$$

د راکړل شوي سیستم د دویمې معادلې څخه لیکلای شو چې :

$$\frac{1}{2}\left\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\right\} = \frac{3}{4} \Rightarrow 2\cos(x+y) + 2\cos(x-y) = 3$$

$$\Rightarrow 2\left(\cos^2\frac{x+y}{2} - \sin^2\frac{x+y}{2}\right) + 2\left(\cos^2\frac{x-y}{2} - \sin^2\frac{x-y}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow 2\left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) + 2\left(2\cos^2\frac{x-y}{2} - 1\right) = 3$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2} + 4\cos^2\frac{x-y}{2} - 4 = 3$$

$$\Rightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2} + 4\cos^2\frac{x-y}{2} = 7 \quad \dots \quad II$$

اوس په دوهمه معادله کښې د $\cos\frac{x-y}{2}$ قیمت وضع کوو،

$$\Longrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2} + 4\left(\frac{1}{2\sin\frac{x+y}{2}}\right)^2 = 7$$

$$\Longrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2} + 4\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{x+y}{2}} = 7$$

(په هغه صورت کې چې $x \neq -y$ وي) لیکلای شو چې:

$$4\cos^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x+y}{2} + 1 = 7\sin^2\frac{x+y}{2}$$

$$\Longrightarrow 4\cos^2\frac{x+y}{2}\left(1-\cos^2\frac{x+y}{2}\right)+1 = 7\left(1-\cos^2\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow 4\cos^4\frac{x+y}{2} - 11\cos^2\frac{x+y}{2} + 6 = 0$$

په لاس راغلې معادله کې $\cos^2\frac{x+y}{2} = z$ وضع کوو:

$$\Longrightarrow 4z^2 - 11z + 6 = 0 \qquad \Longrightarrow \Delta = 121 - 96 = 25$$

$$\Longrightarrow z_1 = \frac{11-5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

او $z_2 = \frac{11+5}{8}$ یا $z_2 = 2$

اوس د $z=2$ او $z=\frac{3}{4}$ په معادلو کې د z قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$$\cos^2\frac{x+y}{2} = 3/4 \Longrightarrow \cos\frac{x+y}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } \cos\frac{x+y}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \frac{x+y}{2} = \pi/6$$

$$\Longrightarrow \frac{x+y}{2} = 5\pi/6,\ 7\pi/6, \ldots$$

$$x+y = \pi/3 \ \ldots \text{III} \qquad \text{یا} \qquad x+y = 7\pi/3 \ \ldots \text{IV}$$

اوس د $z=2$ کې د z قیمت وضع کوو. لیکو چې: $\cos^2\frac{x+y}{2} = 2$

یا $-\left(1-\cos^2\frac{x+y}{2}\right) = 1$

$$= -\sin^2\frac{x+y}{2} = 1 \Longrightarrow \sin^2\frac{x+y}{2} + 1 = 0$$

مګر پوهېږو چې $(\sin^2\frac{x+y}{2}+1)$ د تل لپاره د صفر څخه لوی دے نو حکم کولای شو چې

د 2 معادلې جذرونه دي. لروچې: $\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x+y}{2}} \Longrightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1 \Longrightarrow \frac{x-y}{2}=0 \Longrightarrow x-y=0 \Longrightarrow x=y$$

اوس د x قیمت په III او IV معادلوکې وضع کوو $y=\frac{\pi}{6}$ او $y=\frac{7\pi}{6}$ هومو.
خرګنده چې $x=y$ دی، نو ویلای شو چې $x=\frac{\pi}{6}$ یا $x=\frac{7\pi}{6}$، مګر معلومه ده
چې $\frac{7\pi}{6}$ د نوموړی سیستم تصدیق نه کوی، نو ویلای شو چې د راکړل شوی سیستم
حل $x=\frac{\pi}{6}$ او $y=\frac{\pi}{6}$ دی.

یو ویشتم سوال: لاندې سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{4}\\ \cos x\cdot\cos y=-\frac{3}{4}\end{cases}$$

حل: د ضرب د فارمولونو په اساس د نوموړی سیستم څخه لیکلای شو چې:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]=\frac{1}{4} \qquad \cos(x-y)-\cos(x+y)=\frac{1}{2}\ \ldots\ \text{I}$$

$$\Longrightarrow$$

یا $$\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]=-\frac{3}{4} \qquad \cos(x-y)+\cos(x+y)=-\frac{3}{2}\ \ldots\ \text{II}$$

اوس د دواړه معادلې طرف په طرف جمع کوو. لیکلای شو چې:

$$\xrightarrow{\text{I}+\text{II}} 2\cos(x-y)=-\frac{2}{2}=-1$$

$$\Longrightarrow \cos(x-y)=-\frac{1}{2} \Longrightarrow x-y=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \ldots\ \text{III}$$

لروچې: $\cos(x-y)-\cos(x+y)=\frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(x+y)=\cos(x-y)-\frac{1}{2}\ \cdots\ \text{IV}$

په څلورم لمبر معادله د $\cos(x-y)$ قیمت $-\frac{1}{2}$ وضع کوو، لیکلای شو چې:

$$\cos(x+y)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1 \Longrightarrow x+y=\pi,\ 3\pi,\ 5\pi\ \ldots\ \text{V}$$

اوس III او V لمبر معادلې حل کوو:

$$\begin{aligned}x+y&=\pi\\ x-y&=\frac{2\pi}{3}\end{aligned} \xrightarrow{+} 2x=\frac{5\pi}{3} \Longrightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

اوس د x قیمت په $y = x - \frac{2\pi}{3}$ معادله کې وضع کوو :

$$y = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

دوه ویشتم سوال : لاندې سیستم حل کړئ :

$$\begin{cases} tg\,x + tg\,y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

په نوموړي سیستم د ضرب د فارمولونو د تطبیق په نتیجه کې لیکلای شو چې :

$$1)\quad \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos y} = 1 \quad \ldots I$$

$$2)\quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \ldots II$$

اوس نو د $(\cos x \cos y)$ قیمت په I معادله کې وضع کوو ، یعنې :

$$\frac{\sin(x+y)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \Longrightarrow \sin(x+y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x+y = \frac{\pi}{4} \quad \ldots III$$

د بله پلوه لیکلای شو چې : $\frac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Longrightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos(x-y) = \sqrt{2} - \cos(x+y)$$

$$\Longrightarrow \cos(x-y) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow x-y = \frac{\pi}{4} \quad \ldots IV$$

د III او IV معادلو د مقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې ، $x+y = x-y \Longrightarrow y = 0$

د y قیمت په III معادله کې وضع کوو ، لیکو چې : $x = \frac{\pi}{4} - 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

درویشتم سوال : دلاندې سیستم حل په لاس راوړئ :

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = \frac{1}{2} \\ tg\,x \cdot tg\,y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

حل : د ضرب د فرمولو د تطبیق په اساس د نوموړي سیستم څخه لیکلای شو چې :

$$2\cos\frac{2(x+y)}{2}\cos\frac{2(x-y)}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2} \quad \ldots I$$

او $\frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}\cos(x-y) - \sqrt{3}\cos(x+y) = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}\cos(x-y) - \cos(x-y) = \cos(x+y) + \sqrt{3}\cos(x+y)$$

$$\Longrightarrow \cos(x-y)(\sqrt{3}-1) = \cos(x+y)(\sqrt{3}+1)$$

$$\Longrightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cos(x+y)$$

د لمبر I په معادله کې د $(x-y)$ قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$$4\cos(x+y)\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cos(x+y) = 1$$

$$\Longrightarrow 4\cos^2(x+y) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \ldots\ II$$

پوهېږو چې $\cos^2(x+y) = \frac{1+\cos 2(x+y)}{2}$. نو په II معادله کې $\cos^2(x+y)$

قیمت وضع کوو، لیکو چې $4\cdot\frac{1+\cos 2(x+y)}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Longrightarrow 2+2\cos 2(x+y) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$\Longrightarrow 2\cos 2(x+y) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} - 2 = \frac{\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+1} = -\sqrt{3}$$

داچې $2\cos 2(x+y) = -\sqrt{3} \Longrightarrow \cos 2(x+y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

پوهېږو چې د هغه زاویه چې $\cos$ یې $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي عبارت ده له $\frac{5\pi}{6}$ څخه $\Longrightarrow 2(x+y) = \frac{5\pi}{6}$

څرنګه چې: $2(x+y) = \frac{5\pi}{6} \Longrightarrow x+y = \frac{5\pi}{12}$

لرو چې: $\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cos(x+y)$ او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\cos(x+y) = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

نو پورتنۍ معادله کې د $\cos(x+y)$ قیمت وضع کوو $\cos(x-y)$ بالاخره $x-y$

په لاس راځي.

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow x-y = \frac{\pi}{12}$$

اوس دوه معادلې $x+y = \frac{5\pi}{12}$ او $x-y = \frac{\pi}{2}$ په لاس راغلل حل

کوو چې:

$$\begin{cases} x+y = \frac{5\pi}{12} \\ x-y = \frac{\pi}{12} \end{cases} \stackrel{+}{\Longrightarrow} 2x = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

نو لیکلای شوچي: $(\cot g\,a-1)^2+(\cot g\,a+1)^2=(\cot g\,a-1+\cot g\,a+1)^2$

$-2(\cot g\,a-1)(\cot g\,a+1)=(2\cot g\,a)^2-2(\cot g^2 a-1)$

$=4\cot g^2 a-2\cot g^2 a+2=2\cot g^2 a+2$

$=2\cot g^2 a+2=2(1+\cot g^2 a)=2\operatorname{cosec}^2 a$

دیارلسم سوال: ثبوت کړئ چي:

$\frac{1+tg^2 a}{1+\cot g^2 a}=tg^2 a$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ کي د $1+tg^2 a$ مساوی $\sec^2 a$ او

$1+\cot g^2 a$ مساوی $\operatorname{cosec}^2 a$ وضع کوو او لیکو چي:

$$\frac{1+tg^2 a}{1+\cot g^2 a}=\frac{\sec^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a}=\frac{\frac{1}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\sin^2 a}}=\frac{1}{\cos^2 a}\cdot \sin^2=tg^2 a$$

څوارلسم سوال:

ثبوت کړئ چي: $(\sec a+\cos a)(\sec a-\cos a)=tg^2 a+\sin^2 a$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ د $(a+b)(a-b)$ شکل لري

او $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ نو لیکلای شوچي:

$(\sec a+\operatorname{cosec} a)(\sec a-\operatorname{cosec} a)=\sec^2 a-\operatorname{cosec}^2 a$

$=\frac{1}{\cos^2 a}-\cos^2 a=\frac{1-\cos^4 a}{\cos^2 a}=\frac{(1-\cos^2 a)(1+\cos^2 a)}{\cos^2 a}$

$=\frac{\sin^2 a(1+\cos^2 a)}{\cos^2 a}=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}+\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\cdot\cos^2 a$

$=tg^2 a+\sin^2 a$

پنځلسم سوال: ثبوت کړئ چي: $\sec^4 a-tg^4 a=\sec^2 a+tg^2 a$

حل: د نوموړی مطابقت چپه خوا د a^4-b^4 شکل لري، څرنګه چي:

$a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ نو لیکلای شوچي: (بل مخ کي)

x قیمت په $x+y=\frac{5\pi}{12}$ معادله کې وضع کوو، y به لاس راشي:

$$y = \frac{5\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{2\pi}{12}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

ددولسم تولکی دمثلثاتو مربوط سوالونه

نهم تمرین

لومړی سوال : دیوه مثلث دا ضلاعو اوږدوالی $a=7$ ، $b=10$ او $c=13$ واحد دی ، نو موږ ی مثلث حل کړئ .

حل : که دمثلث نیمایی په p سره وښایو نو لیکلای شو چې : $p=\frac{7+10+13}{2}=15$

دبله طرفه پوهیږو چې $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ نو د راکړل شوی مثلث د A زاوې موندلو لپاره دهمدې فرمول څخه استفاده کوو او لیکو چې :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(15-10)(15-13)}{10\cdot 13}}=\sqrt{\frac{1}{13}}$$

اوس د $\sqrt{\frac{1}{13}}$ د اطراف $\log$ نیسو ، یعنې :

$$\log\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left\{\log_1-\log 13\right\}=-\frac{1}{2}\cdot 1,11394=-0,55697$$

$$=-1+1+(-0,55697)=\bar{1},44303$$

که $N=\sin\frac{A}{2}$ فرض کړو نو لیکلای شو چې : $\log N=\bar{1},44303$. څرنګه چې کرکترستیک منفي یو (-1) دی نو معلومه ده چې د N دعدد صحیح رقم صفردی . دلیشاری رقمونو دسندلو لپاره لومړی د اعدادو دلوګاریتم په جدول کې (44) پیدا کوو چې پا متې

رقمونه یې هم په آسانه سره پیدا کېږي. کله موږ چې د امانتیس په جدول کې پیدا کړو
ګورو چې په کوم سطر او کوم ستون پورې اړه لري. نو د سطر او ستون لمبرې عبارت
دي د نوموړي عدد یعنې (N) د اعشاري رقمونو څخه. مګر معلومېږي چې د
44303 مانتیس په جدول کې نشته د انترپولېشن څخه کار اخلو، یعنې:

لمړی قدم: عدد	مانتیس یې	دویم قدم: 44303	درېیم قدم: د عددونو فرق	د مانتیسونو فرق
16	1	-44295	44311	2774
8	X	8	-44295	-2773
			16	1

$$\Longrightarrow X = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \sin \frac{A}{2} = 2773 + 0{,}5 = 0{,}27735$$

د $A/2$ د زاوېې د موندلو لپاره د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه استفاده کوو، په دې
ډول چې لومړی د 27 عدد د مثلثاتي نسبتونو په جدول کې پیدا کوو. د 27 د
پیدا کولو څخه وروسته باقي رقمونه یې هم په اسانۍ سره پیدا کېږي. کله چې نوموړي
رقمونه پیدا شول ګورو چې په کوم مخ او کوم سطر پورې اړه لري نو د صفحه
مخ او سطر لمبر عبارت دي د نوموړې زاوېې څخه. مګر لیدل کېږي چې د 27735
رقم په جدول کې نشته نو د انترپولېشن په واسطه کولای شو چې نوموړې زاویه په
لاس راوړو:

لمړی قدم: زاوېې	ساینونه	دویم قدم	دریم قدم
16° 10'	0,2784	0,2774	10'
$-16°$	$-0{,}2756$	$-0{,}2756$	X
10'	0,0028	0,0018	

$$\Longrightarrow X = \left(\frac{18 \cdot 10}{28}\right)' = \left(\frac{45}{7}\right)' \quad \text{یا} \quad X = 6'\ 25{,}8''$$

په پورته ډول د $\hat{B}$ زاویه هم په لاس راوړو پوهېږو چې:

$$\sin B/_2 = \sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{ac}} \Longrightarrow \sin B/_2 = \sqrt{\frac{(15-7)(15-3)}{7\cdot 13}} = \sqrt{\frac{16}{91}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin B/_2 = \frac{1}{2}\{\log 16 - \log 91\} = \frac{1}{2}\{1,20412 - 1,95904\}$$

$$= 1/_2 \cdot 0,75492 \quad = -0,37746 \quad = -1 + 1 - 0,37746$$

$$\Longrightarrow \log \sin B/_2 = \bar{1},62254$$

څرنګه چې د 62254 رقمونه د مثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د انترپولېشن په واسطه د B/2 زاویه پیداکوو یعنې:

څرنګه چې: $\log 4193 = \bar{1},62252$ او $\log 4194 = \bar{1},62263$ پس لیکو چې

1/ اعداد — مانتیسونه یې ، 2/ ,62254 ، 3/ د اعدادو فرق — د مانتیسونو فرق یې

اعداد	مانتیسونه یې			
4194	,62263	,62252 −	1	0,00011
4193	,62252 −	,00002	x	0,00002
1	,00011			

$$\Longrightarrow x = 0,182 \qquad \Longrightarrow \sin B/_2 = 0,41932$$

اوس غواړو چې د B/2 زاویه راسته د جدول څخه په لاس راوړو نو د انترپولېشن څخه کار اخلو:

1/ زاویې — ساینونه یې ، 2/ ,41932

زاویې	ساینونه یې	
24° 48′	,41945	,41932
24° 47′	,41919 −	,41919 −
60″	26	13

3/

60″	26
x	13

$$\Longrightarrow x = \left(\frac{13\cdot 60}{26}\right)'' \Longrightarrow x = 30''$$

$\Rightarrow B/2 = 24^\circ\ 47'\ 30'' \Longrightarrow B = 49^\circ\ 35'$

د C زاویه دا رنګه په لاس راورو:

$\hat{C} = 180^\circ - (A+B)$

$= 180^\circ - (42^\circ\ 2'\ 25'',8 + 49^\circ\ 35')$

$= 179^\circ\ 59'\ 60'' - (91^\circ\ 37'\ 25'',8) = 88^\circ\ 22'\ 34'',2$

$\Longrightarrow \hat{C} = 88^\circ\ 22'\ 34'',2$

دویم سوال: دیوه مثلث اضلاع $a=32$ ، $b=40$ او $C=66$ نومورړی مثلث حل کړئ:

حل: د نومورړی مثلث دمحیط نیمایی یعنی: $P = \frac{32+40+66}{2} = 69$

$\Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{(69-40)(69-66)}{40 \cdot 66}} = \sqrt{\frac{29}{880}}$

$\Longrightarrow \log \sin A/2 = \frac{1}{2}\{\log 29 - \log 880\} = \frac{1}{2}[1,46240 - 2,94448]$

$= \frac{1}{2}[-1,48208] = -0,74104$

یا $\log \sin A/2 = 1+1-0,74104 = \bar{1},25896$

څرنګه چې د 25896 رقم په جدول کې نشته نود انترپولیشن په واسطه یې مربوط عدد پیدا کوو.

په جدول کې: $\log 1815 = \bar{3},25888$ او $\log 1816 = \bar{3},25912$ لیکو چې:

1/

اعداد	مانتیسونه
18 16	.25912
18 15	−.25888
1	.00024

2/

.25896	
−.25888	1
.00008	x

3/

داعدادو فرق	دمانتیسونو فرق
1	.00024
x	.00008

$\Rightarrow x = .333$

$\Rightarrow 1815 + ,333 = \hat{N} = \sin \frac{A}{2} \overset{\text{تقریباً}}{\approx} 1815{,}4$

څرنګه چې کرکترستیک $\bar{1}$ دی نو معلومه ده چې صحیح رقمونه صفر دی .

$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} = 0{,}18154$

بیاهم د $\frac{A}{2}$ زاویې د موندلو لپاره د انترپولیشن څخه استفاده کوو ځکه چې 0,18154 په جدول کې نشته .

په جدول کې: $\sin 10^\circ 27' = 0{,}18138$ ، پس لیکو چې :

1/

زاویې	نسبتونه
$10^\circ 28'$	0,18166
$10^\circ 27'$	−0,18138
$60''$	0,00028

2/

$$\begin{array}{r} 0{,}18154 \\ 0{,}18138 \\ \hline 0{,}00016 \end{array}$$

3/

دزاویو فرق	دنسبتونو فرق
$60''$	28
X	16

$\Rightarrow X = \left(\frac{16 \cdot 60}{28}\right)'' \Rightarrow X = (34{,}3)'' \Rightarrow \frac{A}{2} = 10^\circ\ 27'(34{,}3)''$

$\Rightarrow \hat{A} = 20^\circ\ 54'\ 68{,}6'' \quad \Rightarrow A = 20^\circ\ 55'\ 8{,}6''$

په همدې ډول د B زاویه په لاس راوړو :

$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(69-32)(69-66)}{32 \cdot 66}}$

$= \sqrt{\frac{37}{32 \cdot 22}} \Rightarrow \log \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{\log 37 - \log 22 - \log 32\}$

$= \frac{1}{2}\{1{,}56820 - 1{,}34242 - 1{,}50515\} = -\frac{1}{2} \cdot \bar{1}{,}279370 \quad (0{,}639685)$

$\Rightarrow \log \sin \frac{B}{2} = \bar{1}{,}360315$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نشته د انترپولیشن په د نوموړي مانتیس مربوط عدد پیدا کوو :

1/

اعداد	مانتیسونه
2300	0,36173
−2299	0,35154
1	0,00019

2/

$$\begin{array}{r} 0{,}36032 \\ -0{,}35154 \\ \hline 0{,}00878 \end{array}$$

3/ داعدادو فرق	دمانتیسونو فرق
1	0,00019
X	0,00878

$$\Longrightarrow X = \frac{878}{19} \Longrightarrow 46,3$$

څرنګه چې کرکتر ستیک منفی یو دی نو : $\sin B/2 = 0,23453$

هرکله چې د 23453 ، 0 رقم دمثلثاتی نسبتونو په جدول کې نشته نو د B/2 زاویې

دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه استفاده کوو ، یعنې :

دمثلثاتی نسبتونو په جدول کې $\sin 13^\circ 33' = 0,23429$ او $\sin 13^\circ 34' = 0,23458$

نو لیکو چې :

1/ زاویې	نسبتونه یې	2/ 0,23453
$13^\circ 34'$	$-0,23429$	$0,23429$
$-13^\circ 33'$	$0,23458$	$0,00024$
$60''$	$0,00029$	

3/ دزاویو فرق	دنسبتونو فرق
$60''$	29
X	24

$$\Longrightarrow X = \left(\frac{24 \cdot 60}{29}\right)'' \text{ یا } X = (49,7)''$$

$$\Longrightarrow B/2 = 13^\circ 33' + 49,7'' \Longrightarrow \hat{B} = 27^\circ 7' 39,4''$$

$$\Longrightarrow \hat{C} = 180^\circ - (20^\circ 55' 8,6'' + 27^\circ 7' 39,4''$$

دریم سوال : دیوه مثلث $a=2$ ، $9=b$ او $C=\sqrt{3}+1$ نوموړے مثلث حل کړئ!

حل : دنوموړی مثلث دمحیط نیمایی یعنې $3,866$ نو دنوموړې مثلث دزاویو دموندلو لپاره دنیمایی زاویې د $\sin$ څخه کاراخلو :

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(3,866-3)(3,866-2,732)}{3\cdot 2,732}}$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{433\cdot 0,567}{2049}}$$

دپه لاس راغلې رابطې داطراف لوګاریتم نیسو

$$\log\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\log\left\{\frac{433\cdot 0,567}{2049}\right\}=\frac{1}{2}\left[\log 433+\log 0,567-\log 2049\right]=\frac{1}{2}$$

$$\left[2,636349-3+2,75358-3,30154\right]=\frac{1}{2}(-0,91148)=\bar{1},54426$$

د $\sin\frac{A}{2}$ دپیداکولو لپاره دانترپولېشن څخه کاراخلو ، ځکه چې په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نشته :

اعداد /1	مانتیسونه یې	/2 ,54426		/3	
3502	,54432	,54419		1	0,00013
3501	,54419	,00007		X	0,0007
1	,00013				

$$\Longrightarrow X=0,6$$

$$\Longrightarrow \sin\frac{A}{2}=0,35016 \quad \text{یا} \quad \sin\frac{A}{2}=0,3502$$

اوس د $\frac{A}{2}$ زاویې دموندلو لپاره دمثلثاتي نسبتونو دجدول څخه استفاده کوو ، لیدل کیږي چې د $0,3502$ نسبت په 2° مخ کې د 30 په سطر کې واقع دئ نو $\frac{A}{2}=20^{\circ}30' \Rightarrow \hat{A}=41^{\circ}$

په همدې ډول د $\hat{B}$ زاویه هم په لاس راوړو :

$$\log\sin\frac{B}{2}=\log\sqrt{\frac{(3,866-2)(3,866-2,732)}{5,464}}=\sqrt{\frac{1,866\cdot 1,134}{5,464}}=\frac{1}{2}\log 2$$

$$\left[-3+\log 567+\log 933-\log 1366\right]=\frac{1}{2}\left[-6,13545+2,75358+2,96988\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 0,41199=-0,205995$$

$$=\bar{1},794005=\bar{1},79401$$

$$\Longrightarrow \log\sin\frac{B}{2}=\bar{1},79401$$

نو موږ ی مانتیس په جدول کې نشته $\sin B/2$ دانترپولیشن په واسطه یې لاس ته راوړو.

1/	اعداد	مانتیسونه يې	2/	0,79401	3/	1	7
	6224	0,79407		0,79400		X	1
	-6223	-0,79400		1		X = 0,15	
	1	7					

4/ $6223 + 0,15 = 6223,15$

داچې کرکترستیک يې (آ) دی، نو صحیح رقم يې صفر دی نو: $\sin B/2 = 0,6224$

اوس د $B/2$ زاويې دموندلو لپاره دمثلثاتي نسبتونو دجدول څخه استفاده کوو:

1/	38° 30′	0,6225	2/	0,6224	3/	10′	23
	38° 20′	0,6202		0,6202		X	22
	10′	0,0023				X = 9′ 36″	

4/ $B/2 = 38° 20' + 9' 36'' = 38° 29' 36'' \Longrightarrow \hat{B} = 76° 59' 12''$

$$\hat{C} = 179° 59' 60'' - 117° 59' 12'' = 62° 48'$$

څلورم سوال: دیوه مثلث اضلاع $a = 7$، $b = 4\sqrt{3}$ او $c = \sqrt{13}$ دا مثلث حل کړئ؟

حل: دراکړل شوی مثلث دمحیط نیمايي عبارت دی له: $P = \dfrac{3,606 + 6,928 + 7}{2} = 8,767$

$$\Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{(8,767 - 6,928)(8,767 - 3,606)}{6,928 \cdot 3,606}} = \sqrt{\frac{1,839 \cdot 5,161}{6,928 \cdot 3,606}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = 1/2 \left[\log 1,839 + \log 5,161 - \log 6,928 - \log 3,606 \right]$$

$$\log \sin A/2 = 1/2 \left[0,26458 + 0,71273 - 0,84061 - 0,55703 \right]$$

$$= 1/2 (-0,42033) = -0,210165$$

$$= -0,21017 = \bar{1},78983$$

څرنګه چې په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نشته نو دانترپولیشن په واسطه مربوط عدد پیداکوو:

1/ اعداد	مانتيسونه يي	2/	3/	
6164	0,78986	0,78983	1	7
-6163	-0,78979	0,78979	X	4
1	0,00007	0,00004	$\Rightarrow X = 0,58$	

4/ $6163 + 0,58 = 6163,58 \approx 6164 \Longrightarrow \sin\frac{A}{2} = 0,6164$

اوس د مثلثاتی نسبتونو د جدول څخه د $\frac{A}{2}$ زاویه پيدا کوو .

1/ زاويې	Sin مونه يي	2/	3/	
$38^\circ 10'$	0,6180	0,6164	$10'$	0,0023
38	0,6157	0,6157	X	0,0007
$10'$	0,0023	0,0007	$\Rightarrow X = 3,05 = 3' 3''$	

$$\Longrightarrow \frac{A}{2} = 38^\circ 3' 3'' \Longrightarrow 76^\circ 6' 6''$$

د B زاويه هم په همدې ډول په لاس راوړو :

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(8,767-7)(8,767-3,606)}{7 \cdot 7 \cdot 3,606}} = \sqrt{\frac{1,767 \cdot 5,161}{7 \cdot 3,606}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left\{\log 1,767 + \log 5,161 - \log 7 - \log 3,606\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{0,24724 + 0,71273 - 0,84510 - 0,55703\right\} = \frac{1}{2}$$

$$(-0,45216) = -0,22608 = \bar{1},77392 \Longrightarrow \sin\frac{B}{2} = 0,5942$$

اوس د $\frac{B}{2}$ زاويې د پيدا کولو لپاره د مثلثاتی نسبتونو د جدول څخه استفاده کوو :

1/		2/	3/	
$36^\circ 30'$	0,5948	0,5942	$10'$	23
$36^\circ 20'$	-0,5925	-0,5925	X	17
$10'$	0,0023	0,0017	$\Rightarrow X = 7' 24''$	

$$\sec^4 - tg^4 = (\sec^2 a - tg^2 a)(\sec^2 a + tg^2 a)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right)(\sec^2 a + tg^2 a)$$

$$= \frac{1 - \sin^2 a}{\cos^2 a}(\sec^2 a + tg^2 a) = \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}(\sec^2 a + tg^2 a)$$

$$= \sec^2 a + tg^2 a$$

شپاړسم سوال: ثبوت کړئ چي:

$$\operatorname{cosec}^4 a - \operatorname{cotg}^4 a = \operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a$$

دراکسرل شوی مطابقت چپ اړخ د $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$ په اساس داړنګه لیکلای شو:

$$\operatorname{cosec}^4 a - \operatorname{cotg}^4 a = (\operatorname{cosec}^2 a - \operatorname{cotg}^2 a)(\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}\right)(\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a}{\sin^2 a}(\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a) = \frac{\sin^2 a}{\sin^2 a}(\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a)$$

$$= 1 \cdot (\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a) = (\operatorname{cosec}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a)$$

اوولسم سوال: ثبوت کړئ چي:

$$\frac{\cos a}{1 - tg\, a} + \frac{\sin a}{1 - \operatorname{cotg} a} = \sin a + \cos a$$

حل: دنوموړی مطابقت په چپ اړخ کي د $tg\, a$ او $\operatorname{cotg} a$ په ځای دهغو قیمتونه وضع کوو، لیکو چي:

$$\frac{\cos a}{1 - tg\, a} + \frac{\sin a}{1 - \operatorname{cotg} a} = \frac{\cos a}{1 - \frac{\sin a}{\cos a}} + \frac{\sin a}{1 - \frac{\cos a}{\sin a}}$$

$$= \frac{\cos a}{\frac{\cos a - \sin a}{\cos a}} + \frac{\sin a}{\frac{\sin a - \cos a}{\sin a}} = \frac{\cos^2 a}{\cos a - \sin a} - \frac{\sin^2 a}{\cos a - \sin a}$$

$$= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos a - \sin a} = \frac{(\cos a - \sin a)(\cos a + \sin a)}{\cos a - \sin a} = \cos a + \sin a$$

4/ $36^\circ\ 20' + 7'\ 24'' = B/2 \Longrightarrow \hat{B} = 72^\circ\ 54'\ 48''$

$\hat{C} = 179^\circ\ 59'\ 60'' - (\hat{A}+\hat{B}) = 179^\circ\ 59'\ 60'' - 149^\circ\ 0'\ 54''$

$\Longrightarrow \hat{C} = 30^\circ\ 59\ 60''$

پنځم سوال :

دیوه مثلث اضلاع $a=638,4$ ، $b=532,7$ او $C=9351$ دی

نوموړی مثلث حل کړئ ؟

حل : دراکړل شوی مثلث د محیط نیمایی عبارت دی له : $P=\frac{638,4+532,7+9351}{2}$

$= 5261,05 \Longrightarrow \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(5261,5-532,7)(5261,05-9351)}{9351\cdot 532,7}}$

$= \sqrt{\frac{4728,35(-4089,95)}{9351\cdot 532,7}}$

ځرنګه چې ترجذر لاندې عدد منفي دی او منفي اعداد جذر المربع نلري، نو په دې اساس راکړل شوی مثلث حل نلري .

شپږم سول ؛ دیوه مثلث اضلاع $a=9$ ، $b=10$ او $C=11$ دی نوموړی مثلث حل کړئ ؟

حل: واضح ده چي دمثلث دمحیط نیمائي یعني $P = 15$ نو لیکو چي:

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(15-10)(15-9)}{10 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \log \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \log 1 - \log 3 \right\}$$

$$= \frac{1}{2}(-0{,}47712) = -0{,}23856$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کي نشته نو مربوط عدد یې د انترپولیشن په واسطه پیدا کوو.

په جدول کي $\log 5773 = 0{,}76140$ او $\log 5774 = 0{,}76148$ نو لیکو چي:

1/ اعداد	مانتیسونه یې	2/	3/ د اعدادو فرق	دمانتیسونو فرق
5774	0,76148	0,76144		
-5773	-0,76140	-0,76140	1	8
1	0,00008	0,00004	X	4

$\Rightarrow X = 0{,}5$ 4/ $5773 + 0{,}5 = 5773{,}5$

ځکه چي کرکترستیک (ا) دی نو د عدد صحیح رقمونه صفر دی.

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = 0{,}57735$$

په لاس راغلی نسبت په جدول کي نشته دانترپولیشن په واسطه د $\frac{C}{2}$ زاویه پیدا کوو:

1/ زاوېي	نسبتونه يې	2/ 0,57735	3/ دزاويو فرق	دنسبتونو فرق
35° 16′	0,57738	−0,57715	60″	23
35° 15′	−0,57715	20	X	20
60″	23			

$$\Rightarrow X=\left(\frac{20\cdot 60}{23}\right)'' \Rightarrow X=(52,2)''$$

$$\Rightarrow C/2 = 35^\circ\ 15' + (52,2)'' \Rightarrow C = 70^\circ\ 31'\ 54,4''$$

اوس د A زاويه پيداکوو:

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \sin A/2\ \sqrt{\frac{5\cdot 4}{10\cdot 11}}$$

$$= \sin A/2 = \sqrt{2/11}$$

$$\Rightarrow \log \sin A/2 = 1/2\ \{\log 2 - \log 11\} \Rightarrow \log \sin A/2 = 1/2$$

$$[0,30103 - 1,04139]$$

$$\Rightarrow \log \sin A/2 = 1/2\ (\overset{0,27018}{-0,74036}) \Rightarrow \log \sin A/2 = \bar{1},72982$$

ددې لپاره چې د 0,72982 مانتيس مربوط عدد پيداکړو دانترپولېشن څخه استفاده کوو.

1/ اعداد	مانتيسونه يې	2/ 0,72982	3/ داعدادو	دمانتيسونو
			فرق	فرق
5369	0,72989	−0,72981		
−5368	−0,72981	1	1	8
1	8		X	1

$$\Rightarrow X = 1/8 \Rightarrow X \overset{\text{تقريباً}}{\approx} 0,2$$

پس مطلوب عدد عبارت دی له $0,2 + 5368 = 5368,2$. مګر څرنګه چې

کرکتريستيک منفي يودی نو د عدد صحيح رقمونه صفر ده، پس $\sin A/2 = 0,53682$

ددې لپاره چې د A زاويه پيداکړو بيا هم د انترپولېشن څخه استفاده کوو

څنګه چې 53682 رقم په جدول کې نشته.

1/ زاویې	نسبتونه یې	2/ 0،53682 ← په لاس راغلی نسبت
$32^\circ\ 29'$	0،53705	$-$0،53681 ← دکوچنۍ زاویې نسبت
$-32^\circ\ 28'$	$-$0،53681	1
$60''$	24	

3/ دزاویو فرق   دنسبتونو فرق

$$\begin{matrix} 60'' & 24 \\ X & 1 \end{matrix} \Longrightarrow X=\left(\frac{60}{24}\right)'' \Longrightarrow X = 2,5''$$

$$\Longrightarrow A/2 = 32^\circ\ 28'\ 2,5'' \Longrightarrow \hat{A} = 64^\circ\ 56'\ 5''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A}+\hat{C}) \Longrightarrow \hat{B} = 179^\circ\ 59'\ 60'' - (64^\circ\ 56'\ 5'' + 70^\circ\ 31'\ 54,4'')$$

$$\hat{B} = (179^\circ\ 59'\ 60'' - 135^\circ\ 27'\ 54,9'')$$

$$\hat{B} = 44^\circ\ 32'\ 5,1''$$

اووم سوال: دیوه مثلث اضلاع په ترتیب سره $a=2$ ، $b=3$ او $c=4$ دی، ترټولو لویه زاویه یې په لاس راوړئ؟

حل: واضح ده چې: $P = \frac{4+3+2}{2} = 4,5$

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(4,5-3)(4,5-4)}{3\cdot 4}} \Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = 1/2\left\{-\log 16\right\} \text{ یا } \log \sin A/2 = -\frac{1}{2}\cdot 1,20412 \quad (0,60206)$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = \bar{1},39794$$

په لاس راغلی مانتیس او مربوط عددي په جدول کې نشته چې عبارت دی له 2500 څخه. څرنګه چې کرکترستیک ($\bar{1}$) دی نو صحیح دنمونه یې صفر دی.

$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} = 0{,}2500$

د $A/2$ دموندلو لپاره دانترپولېشن څخه استفاده کوو څکه چې $0{,}2500$ نسبت دمثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته.

1/

زاویې	ساینونه یې
$-14^\circ 28'$	$-0{,}24982$
$+14^\circ 29'$	$+0{,}25010$
$60''$	$0{,}00028$

2/

$$0{,}25000 - 0{,}24982 = 0{,}00018$$

3/

دزاویو فرق	دساینونو فرق
$60''$	28
X	18

$$\Rightarrow X = \left(\frac{18 \cdot 60}{28}\right)'' \Rightarrow X = (38{,}6'')$$

نو $\frac{A}{2} = 14^\circ\ 28'\ 38{,}6'' \Rightarrow \hat{A} = 28^\circ\ 57'\ 17{,}2''$

اوس نو د B زاویه پیداکوو:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 0{,}5}{2{,}4}} \Rightarrow \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$\Rightarrow \log \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{\log 5 - \log 32\} = \frac{1}{2}\{0{,}69897 - 1{,}50515\}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 0{,}80618 \Rightarrow \log \sin \frac{B}{2} = \bar{1}{,}59691$$

دپه لاس راغلي مانتيس دمربوط عدد دپيدا کولو لپاره دانترپولېشن څخه کار اخلو څکه چې په جدول کې نشته.

1/

اعداد	مانتیسونه یې
3953	$0{,}59693$
-3952	$-0{,}59682$
1	$0{,}00011$

2/

$$0{,}59691 - 0{,}59682 = 0{,}00009$$

3/

داعدادو فرق	دمانتیسونو فرق
1	$0{,}00011$
X	$0{,}0009$

$\Longrightarrow X = \frac{9}{11}$ یا $X = \underset{\text{تقریباً}}{\approx} 0,9$

پس د 0,59691 ره مانتیس مربوط عدد عبارت دی له 0,3952+ و = 0,39529

خرنگه چې کرکتر ستیک (ا) دی نو : $\sin B/2 = 0,39529$

داچې په لاس راغلی نسبت په جدول کې نشته نو زاویه راسا له جدول څخه نشو

پیدا اصولاً د انترپولیشن په واسطه یې پیداکوو ؛

۱/ زاویې	ساینونه یې	2/	3/	
$23^\circ\ 18'$	$0,39555$	$0,39529$	دزاویو فرق	دساینو نو فرق
$-23^\circ\ 17'$	$-0,39528$	$0,39528$	$60''$	27
$60''$	27	1	X	1

$\Longrightarrow X = (2,3'') \Longrightarrow B/2 = 23^\circ\ 17'\ 2,3'' \Longrightarrow \hat{B} = 46^\circ\ 34'\ 4,6''$

$\Longrightarrow \hat{C} = 180^\circ - (28^\circ\ 57'\ 17,2'' + 46^\circ\ 34'\ 4,6''$

$\Longrightarrow \hat{C} = 104^\circ\ 28'\ 38,2''$

پس تر ټولو لویه زاویه $\hat{C}$ ده .

اتم سوال : دیوه مثلث اضلاع په ترتیب سره $a = 130$ ، $b = 123$

او $c = 77$ دی . تر ټولو لویه زاویه یې په لاس راوړئ ؟

حل ، د مثلث دمحیط نیمایي یې معنی : $P = 165$

$\sin A/2 = \sqrt{\frac{42 \cdot 88}{77 \cdot 123}} \Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{16}{41}} \Longrightarrow \log \sin A/2 = \frac{1}{2}\{\log 16 - \log 41\}$

$\Longrightarrow \log \sin A/2 = \frac{1}{2}\{1,20412 - 1,61278\} = \frac{1}{2}\{-0,40866\}$ ($0,20433$)

$= -0,204433 \Longrightarrow \log \sin A/2 = \bar{1},79567.$

د په لاس راغلی مانتیس عدد په جدول کې 6247 موجو ، مگر څرنګه چې کرکتر ستیک

(آ) دی. نو: $\sin A/2 = 0,62470$

په لاس راغلی ساین په جدول کې نشته نو $A/2$ راسا له جدول څخه نشو پیدا کولای دانسترپولیشن څخه کاراخلو.

1/

زاویې	ساینونه یې
$38^\circ 40'$	0,62479
$-38^\circ 39'$	−0,62456
$60''$	23

2/

$$\begin{array}{r} 0,62470 \\ -0,62456 \\ \hline 14 \end{array}$$

3/

دزاویو فرق	دساینو فرق
$60''$	23
X	14

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{14 \cdot 60}{23}\right)'' \Rightarrow x \approx 36,6''$$

$$\Rightarrow A/2 = 38^\circ\ 39'\ 36,6'' \Rightarrow A = 73^\circ\ 19'\ 13,2''$$

اوس د B زاویه پیداکوو.

$$\sin B/2 \sqrt{\frac{(165-130)(165-77)}{130 \cdot 77}} \Rightarrow \sin B/2 = \sqrt{\frac{4}{13}}$$

$$\Rightarrow \log \sin B/2 = 1/2 \{\log 4 - \log 13\} = 1/2 \{0,60206 - 1,11394\}$$

$$= -1/2 \cdot 0,51188 = -0,25594$$

$$\Rightarrow \log \sin B/2 = \bar{1},74406$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې مشته چې 554 کرښه او 70 یم ستون مپورې اړه لري. اما داچې کرکترستیک ($\bar{1}$) دی نو صحیح رقمونه یې صفر دی:

$$\Rightarrow \sin B/2 = 0,55470$$

په لاس راغلی ساین دمثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د $B/2$ د پیداکولو لپاره انترپولیشن څخه استفاده کوو.

1/

زاویې	ساینونه یې
$33^\circ 42'$	0,55484
$-33^\circ 41'$	−0,55460
$60''$	24

2/

$$\begin{array}{rl} 0,55470 & \leftarrow \text{په لاس راغلی ساین} \\ 0,55460 & \leftarrow \text{کمه زاویې ساین} \\ \hline 10 & \end{array}$$

3/ دزاویو فرق	دساینو نو فرق
$60''$	24
X	10

$\Longrightarrow X = 25'' \Longrightarrow B/2 = 33^\circ\ 41'\ 25''$

$\Longrightarrow B = 67^\circ\ 22'\ 50'' \Longrightarrow \hat{C} = 180^\circ - (73^\circ\ 19'\ 13{,}2'' + 67^\circ\ 22'\ 50'')$

$= 39^\circ\ 17'\ 56{,}8''$

نهم سوال: دیوه مثلث اضلاع $a = 5$ ، $b = 4$ او $C = 7$ دی. دا مثلث حل کړئ:

حل: واضح ده چې: $P = 8$

$\Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{(8-7)(8-4)}{7 \cdot 4}} \Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{1}{7}} \Rightarrow \log \sin A/2 = 1/2 \{-\log 7\}$

$= -1/2 \cdot 0{,}84510 = 0{,}42255 \Longrightarrow \log \sin A/2 = \bar{1}{,}57745$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نشته چې مربوط عدد یې په لاس راوړو نو دانترپولیشن څخه استفاده کوو.

1/ اعداد	مانتیسونه یې	2/	
- 3779	- 0,57738	0,57745	په لاس راغلی مانتیس ←
3780	0,57749	0,57738	دکوچنی عدد مانتیس ←
1	11		

3/ دعددونو فرق	دمانتیسونو فرق
1	11
X	7

$\Longrightarrow X = \approx 0{,}7$

نو مطلوب عدد عبارت دی له: $3779{,}7$

$\Longrightarrow \sin A/2 = 0{,}37797$

داچي په لاس راغلی ساین د مثلثاتی نسبتونو په جدول کي نشته نو د $A/2$ زاویه دانترپولیشن په واسطه پیدا کوو .

1/ زاویې — ساینونه یې

زاویې	ساینونه یې
22° 12′	0,37784
22° 13′	0,37811
60″	27

2/ په لاس راغلی ساین ← 0,37797
دکوچنۍ زاویې ساین ← 0,37784
13

3/ دزاویو فرق — دساینونو فرق

$$60'' \quad 27 \Longrightarrow X = 28{,}9'' \Longrightarrow A/2 = 22^\circ\ 12'\ 28{,}9''$$

$$X \quad 13 \Longrightarrow \hat{A} = 44^\circ\ 24'\ 57{,}8''$$

$$\sin B/2 = \sqrt{\frac{(8-5)(8-7)}{5\cdot 7}} = \sqrt{\frac{3}{35}} \Longrightarrow \lg \sin B/2 = 1/2\left\{\lg 3 - \lg 35\right\}$$

$$= 1/2\left\{0{,}47712 - 1{,}54407\right\} = -0{,}533475$$

$$\Longrightarrow \lg \sin B/2 \overset{\text{تقریبا}}{=\approx} \bar{1}{,}46653$$

دانترپولیشن په واسطه $\sin B/2$ په لاس راوړو . ځکه چي په لاس راغلی مانتیس په جدول کي نشته .

1/ اعداد — مانتیسونه یې

اعداد	مانتیسونه یې
2928	0,46657
−2927	−0,46642
1	15

2/ 0,46653
0,46642
11

3/ داعدادو فرق — دمانتیسو فرق

داعدادو فرق	دمانتیسو فرق
1	15
X	11

$$\Longrightarrow X = \approx 0{,}7$$

$$\text{پس مطلوب عدد} = 2927{,}7 \Longrightarrow \sin B/2 = 0{,}29277$$

په لاس راغلی Sin په جدول کي نشته دانترپولیشن په واسطه $B/2$ په لاس راوړو .

1/ زاویې — ساینونه یې — 2/ 0,29277 — 3/ دزاویوفرق — دساینونوفرق

زاویې	ساینونه یې			
$17^\circ\ 2'$	0,29293	0,29265	$60''$	28
$-17^\circ\ 1'$	− 0,29265	12	X	12
$60''$	28			

$$\Rightarrow X = (25,7'')$$

$$\Rightarrow B/2 = 17^\circ\ 1'\ (25,7'') \Longrightarrow \hat{B} = 34^\circ\ 2'\ 51,4'' \Longrightarrow \hat{C} = 68^\circ\ 34'\ 19,6''$$

اووم سوال : دیوه مثلث اضلاع $a=6$ ، $b=10$ او $C=17$ دی، نوموړې مثلث حل کړئ .

حل : پوهیږو چې $P=16,5$ نو لیکلای شو چې ،

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(16,5-10)(16,5-17)}{17\cdot 10}} = \sqrt{\frac{6,5\,(-0,5)}{10\cdot 17}}$$

څرنګه چې منفی اعداد مربع جذر نلري، نوراکړل شوی مثلث حل نلري .

لسم سوال : دیوه مثلث اضلاع $a=16$ ، $b=10$ او $C=17$ دی ، نوموړې مثلث حل کړئ .

حل : واضح ده چې $P=21,5$ نو لیکلای شو چې :

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(21,5-17)(21,5-10)}{17\cdot 10}} = \sqrt{\frac{23\cdot 9}{40\cdot 17}}$$

$$\log \sin A/2 = \tfrac{1}{2}\{\log 23 + \log 9 - \log 40 - \log 17\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{1,36173 + 0,95424 - 1,60206 - 1,23045\}$$

$$= -0,25827 \qquad = \bar{1},74173$$

د $\sin A/2$ دپیدا کولو لپاره دانتر پولیشن څخه کارا خلو .

(په بل مخ کې)

اتلسم سوال، ثبوت کړئ چې: $\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cotg} a+\operatorname{tg} a} = \cos a$

حل: دنوموړې په چپ اړخ کې د $\operatorname{cotg} a$ مساوی یعنې $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$ وضع کوو

لیکو چې:

$$\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cotg} a+\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{cosec} a}{\frac{1}{\operatorname{tg} a}+\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{cosec} a}{\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a}}$$

$$= \operatorname{cosec} a \cdot \frac{\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{\sin a} \cdot \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a}$$

$$= \frac{1}{\cos a} \cdot \cos^2 a = \cos a$$

نولسم سوال، ثبوت کړئ چې:

$$(\sin a+\cos a)(\operatorname{cotg} a+\operatorname{tg} a) = \sec a+\operatorname{cosec} a$$

حل: دنوموړې مطابقت چپ اړخ کې د $\operatorname{cotg} a$ مساوی یعنې $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$ وضع کوو

لیکلای شو چې: $(\sin a+\cos a)(\operatorname{cot} a+\operatorname{tg} a) = (\sin a+\cos a)(\frac{1}{\operatorname{tg} a}+\operatorname{tg} a)$

$$= (\sin a+\cos a)\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg} a}\right) = (\sin a+\cos a)(1+\operatorname{tg}^2 a)\left(\frac{1}{\operatorname{tg} a}\right)$$

$$= (\sin a+\cos a)(\sec^2 a) \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = (\sin a+\cos a)\left(\frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a}\right)$$

$$= \frac{\sin a}{\sin a \cos a} + \frac{\cos a}{\sin a \cos a} = \frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\sin a}$$

$$= \sec a+\operatorname{cosec} a$$

شلم سوال، ثبوت کړئ چې:

$$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a-1} = \cos a \cdot \operatorname{cosec} a$$

حل: دنوموړې مطابقت په چپ اړخ کې د $\operatorname{cosec}^2 a$ مساوی یعنې $\frac{1}{\sin^2 a}$

وضع کوو او لیکو چې: $\sqrt{\operatorname{cosec}^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 a}-1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a}}$

$$= \sqrt{\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin a}\right)^2 \cos^2 a} = \sqrt{(\operatorname{cosec} a \cdot \cos a)^2}$$

$$= \cos a \cdot \operatorname{cosec} a$$

دمانتیسونو	داعدادو 3/	$0,74173$ 2/	مانتیسونه‌یې	اعداد	1/
فرق	فرق	$-0,74170$	$0,74178$	5518	
8	1	3	$-0,74170$	-5517	
3	X		8	1	

$\Longrightarrow X \approx 0,4 \qquad \Longrightarrow \sin \frac{A}{2} = 0,55174$

په لاس راغلی Sin دمثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته‌نو د $A/2$ دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه کار اخلو :

25	$60''$ 3/	$0,55174$ 2/	ساینونه‌یې	زاویې	1/
5	X	$-0,55169$	$0,55194$	$33°\,30'$	
$\Longrightarrow X = 12''$		5	$-0,55169$	$-33°\,29'$	
			25	$60''$	

$\Longrightarrow \hat{A}/2 = 33°\,29'\,12'' \qquad \Longrightarrow \hat{A} = 66°\,58'\,24''$

په همدې ډول د $\hat{B}$ زاویه پیداکوو :

$\sin B/2 \sqrt{\frac{(21,5-16)(21,5-17)}{16\cdot 17}}$

$= \sqrt{\frac{99}{48\cdot 17}} \Longrightarrow \log \sin B/2 = \frac{1}{2}\{\log 99 - \log 48 - \log 17\}$

$= \frac{1}{2}\{1,99564 - 1,68124 - 1,23045\} = -0,45803 = \bar{1},54197$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نشته د $\sin B/2$ دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه استفاده کوو .

یوولسم سوال : دیوه مثلث اضلاع $a=25$ ، $b=26$ او $C=27$ دی نوموړی مثلث حل کړئ .

حل : واضح ده چې (P) یعنې دمثلث دمحیط نیمایې 39 دی :

$$\Rightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{(39-26)(39-27)}{26\cdot 27}} = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

$$\log \sin A/2 = 1/2\left[\log 2 - \log 9\right] = 1/2\{,3010 - ,95424\}$$

$$= -1/2 \cdot ,65321 = -0,32661 \Rightarrow \log \sin A/2 = \bar{1},67339$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې شته چې په 471 کربښه او 4 ستون پورې

اړه لري. داچې کرکترستیک (آ) دی، نو بناءً $\sin A/2 = 0,47140$.

داچې په لاس راغلی $\sin$ په جدول کې نشته نو $A/2$ د پیداکولو لپاره له

انترپولیشن څخه استفاده کوو :

1/ زاویې	ساینونه	2/ 0,47140	3/ دزاویو فرق	دساینونو فرق
$28°\ 8'$	0,47153	$-0,47127$		
$-28°\ 7'$	$-0,47127$	13	$60''$	26
$60''$	26		X	13

$$\Rightarrow X = \left(\frac{13\cdot 60}{26}\right)'' \Rightarrow X = 30''$$

$$\Rightarrow A/2 = 28°\ 7'\ 30'' \Rightarrow \hat{A} = 56°\ 15'$$

د $\hat{B}$ د پیداکولو لپاره هم دپورته په شان عمل کوو:

$$\sin B/2 = \sqrt{\frac{14\cdot 12}{25\cdot 27}} \Rightarrow \sin B/2 = \sqrt{\frac{56}{25\cdot 9}}$$

$$\log \sin B/2 = 1/2\{1,74819 - 1,39794 - 0,95424 = -\frac{1}{2}\cdot 0,60399 \quad (0,301995)$$

$\Rightarrow \log \sin B/2 = \bar{1},698005$ یا $\log \sin B/2 =$ تقریباً $\bar{1},69810$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې شته اوپه 4990 عدد پورې اړه لري.

هرکله چې کرکترستیک منفي یو دی، نو دمطلوب عدد صحیح رقم صفر دی.

$$\Rightarrow \sin B/2 = 0,49900$$

په لاس راغلی ساین په جدول کې نشته نو د $B/2$ دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه استفاده کوو.

دساینونو فرق	دزاویو فرق	3/	$0,49900$ 2/	ساینونه یې	زاویې 1/
			$-0,49899$	$0,49924$	$29^\circ 57'$
25	$60''$		1	$-0,49899$	$-29^\circ 56'$
1	X			25	$60''$

$$\Longrightarrow X = 2,4'' \Longrightarrow B/2 = 29^\circ 56' 2,4'' \Longrightarrow B = 59^\circ 52' 4,8''$$

$$\Longrightarrow \hat{C} = 180^\circ - 116^\circ 7' 4,8'' = 179^\circ 59' 60'' - 116^\circ 7' 4,8''$$

$$= 63^\circ 52' 55,2'' \Longrightarrow \hat{C} = 63^\circ 52' 55,2''$$

دولسم سوال: دیوه مثلث اضلاع $a=17$، $b=20$ او $c=27$ دی، نوموړی مثلث حل کړئ.

حل: واضح ده چې $p=32$.

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(32-20)(32-27)}{20 \cdot 27}} = \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = -\tfrac{1}{2} \log 9 = -\tfrac{1}{2} \cdot 0,95424 = \bar{1},52288$$

د $\sin A/2$ دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه استفاده کوو، ځکه چې په لاس راغلی عدد په جدول کې نشته.

3/		2/	مانتیسونه یې	اعداد 1/
$0,00013$	1	$0,52288$	$,52297$	3334
$0,00004$	X	$-0,52284$	$-,52284$	-3333
		$0,00004$	$0,00013$	1

$$\Longrightarrow X = 0,308$$

4/ $3333 + 0,308 = \approx 3333,30$

$\Longrightarrow \sin A/2 = ,33333$ یا تقریباً $\sin A/2 = ,3334$ ځرنګه چې کرکترستیک یې (۱-) دی نو صحیح رقم یې صفر دی.

د $A/2$ د پیداکولو لپاره د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه استفاده کوو.

راځو $\sin 19^\circ 30' = 0{,}3338$

$\sin 19^\circ 20' = 0{,}3311$

د زاویو فرق $= 10'$ 27

2/ $0{,}3334$ $-0{,}3311$ 23

3/ $10'$ 27 ; X 23

$X = 8'' \,.\, 36''$ تقریباً

4/ $19^\circ\, 8'\, 36'' = A/2 \Longrightarrow A = 38^\circ\, 17'\, 12''$

اوس د $\hat{B}$ پیداکوو:

$$\sin B/2 = \sqrt{\frac{15\cdot 5}{27\cdot 17}} = \sqrt{\frac{25}{9\cdot 17}}$$

$$\log \sin B/2 = 1/2 \left\{ \log 25 - \log 9 - \log 17 \right\}$$

$$= 1/2 \left\{ 1{,}39794 - 0{,}59424 - 1{,}23045 \right\} = -1/2 \cdot 0{,}78650$$

$$= -0{,}393275 = \bar{1}{,}60672$$

د $\sin B/2$ انترپولیشن په واسطه پیداکوو، څه چې په لاس راغلی عدد په جدول کې نشته.

1/ اعداد   مانیتسونه یې

4044 $0{,}60681$

-4043 $-0{,}60670$

1 $0{,}00011$

2/ $0{,}60672$ $0{,}60670$ $0{,}00002$

3/ 1 11 ; X 2 ; $X = \approx 0{,}2$

4/ $4043 + 0{,}2 = 4043{,}2 \Longrightarrow \sin B/2 = 0{,}40432$

په لاس راغلی $\sin$ د مثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د $B/2$ د پیداکولو لپاره د انترپولیشن څخه استفاده کوو:

1/ زاویې   ساینونه یې

$23^\circ\, 51'$ $0{,}40434$

$23^\circ\, 50'$ $-0{,}40408$

$60''$ 26

2/ $0{,}40432$ $-0{,}40408$ 24

3/ 60 26 ; X 24

$X = \approx 55{,}4''$

$\Rightarrow B/2 = 23° \ 50' \ 55{,}4''$ یا $\hat{B} = 47° \ 41' \ 50{,}8''$

$\Rightarrow \hat{C} = 180° - 78° \ 15' \ 25{,}2'' \Rightarrow C = 101° \ 44' \ 34{,}8''$

ادیارلسم سوال : دیوه مثلث اضلاع $a=2000$ ، $b=1050$ او $C=1150$ دی . نوموړې مثلث حل کړئ .

حل : واضح ده چې $P=2100$ نو :

$$\log \sin C/2 = \log \sqrt{\frac{100 \cdot 1050}{2000 \cdot 1050}} = 1/2 \log \frac{1}{20} = -1/2 \log 20$$

$$= -1/2 \cdot 1{,}30103 = \bar{1}{,}34948$$

د $\sin C/2$ دپیداکولو لپاره دانترپولیشن څخه استفاده کوو ، یعنې :

1/ اعداد	مانتیسونه یې	2/ 34948	3/ · 1	20
2237	34967	34947	X	1
− 2236	−34947	1	$\Rightarrow X = 0{,}05$	
1	20			

$\Rightarrow \sin C/2 = 0{,}22361$

څرنګه چې په لاس راغلی $\sin$ دمثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د $C/2$ دپیدا کولو لپاره دانترپولیشن څخه کار اخلو .

1/ زاوې یې	ساینونه یې	2/ 0,22361	3/ 60″	29
12° 56′	0,22382	−0,22353	X	8
− 12° 55′	−0,22353	8	$\Rightarrow X = 16{,}5''$	
60″	29			

$\Rightarrow C/2 \doteq 12° \ 55' \ 16{,}5'' \Rightarrow \hat{C} = 25° \ 50' \ 33''$

اوس د $\hat{B}$ زاویه پیداکوو :

$$\sin B/2 = \sqrt{\frac{100\cdot 950}{2000\cdot 1150}} \Longrightarrow \sin B/2 = \sqrt{\frac{19}{20\cdot 23}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin B/2 = 1/2\left[\log 19 - \log 20 - \log 23\right]$$

$$= 1/2\left\{1,27875 - 1,30103 - 1,36173\right\} = 1/2 \cdot -1,38401 = -0,69201$$

$$\Longrightarrow \log \sin B/2 = \bar{1},30799$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کي نشته ، نو د نوموړی مانتیس د مربوط عدد د پیداکولو لپاره د انترپولیشن څخه استفاده کوو .

1/

اعداد	مانتیسونه یي
2033	0,30814
− 2032	− 0,30792
1	22

2/ $0,30799 - 0,30792 = 7$

3/

د اعدادو فرق	د مانتیسونو فرق
1	22
X	7

$\Longrightarrow X = \approx 0,4$

4/ $2032 + 0,4 = 2032,4$

مګر داچي کرکترستیک $(\bar{1})$ نو صحیح رقمونه صفر دی .

$\Longrightarrow \sin B/2 = 0,20324$

په لاس راغلی sin د مثلثاتی نسبتونو په جدول کي نشته ، د $B/2$ د پیداکولو لپاره د انترپولیشن نه کار اخلو :

1/

زاویي	ساینونه یي
11° 44′	0,20336
− 11° 43′	− 0,20307
60″	29

2/ $0,20324 - 0,20307 = 17$

3/

60″	29
X	17

$\Longrightarrow X = 35,2''$

$\Longrightarrow B/2 = 11^\circ\ 43'\ 35{,}2''$ $\Longrightarrow \hat{B} = 22^\circ\ 86'\ 70{,}4'' = 23^\circ\ 27'\ 10{,}4''$

$\Longrightarrow \hat{A} = 180 - (23^\circ - 27'\ 10{,}4'' + 25^\circ\ 60'\ 33') \Longrightarrow \hat{A} = 130^\circ\ 42'\ 16{,}6''$

څوارلسم سوال : دیوه مثلث اضلاع $a=534$ ، $b=856$ او $C=610$ دی. نوموړی مثلث حل کړئ .

حل : واضح ده چې $P=1000$ نو :

$$\Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{144\cdot 390}{856\cdot 610}} = \sqrt{\frac{18\cdot 39}{107\cdot 61}}$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = 1/2\ \{\log 18 + \log 39 - \log 107 - \log 61\}$$

$$\Longrightarrow \log \sin A/2 = 1/2\ \{1{,}25527 + 1{,}59106 - 1{,}78533 - 2{,}02938\}$$

$$= 1/2 \cdot (-0{,}968419 \Longrightarrow \log \sin A/2 = \bar{1}{,}51581$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې نښته مربوط عدد یې د انټرپولیشن په واسطه پیداکوو:

1/ اعداد	مانتیسونه یې	2/ $0{,}51581$	3/ 1	13
3280	$0{,}51587$	$-0{,}51574$	X	7
-3279	$-0{,}51574$	7		$\Longrightarrow X \approx 0{,}6$
1	13	4/ $0{,}32976$		

څرنګه چې کرکټرستیک یې ($\bar{1}$) دی نو د مطلوب عدد صحیح رقم صفر دی.

$$\Longrightarrow \sin A/2 = 0{,}32796$$

په لاس راغلی Sin په جدول کې نښته $A/2$ د انټرپولیشن په واسطه پیداکوو :

1/ زاویې	ساینونه یې	2/ $0{,}32796$	3/ $60''$	27
$-19^\circ\ 8'$	$+0{,}32777$	$-0{,}32777$	X	19
$19^\circ\ 9'$	$-0{,}32804$	19		
	27			$\Longrightarrow X = (42{,}3'')$

$\Rightarrow A/2 = 19° \; 8' \; 42,3''$ $\qquad \Rightarrow \hat{A} = 38° \; 17' \; 42,6''$

اوس د $\hat{B}$ زاویه پیداکوو:

$\sin B/2 = \sqrt{\frac{380 \cdot 466}{610 \cdot 267}} = \sqrt{\frac{19 \cdot 466}{61 \cdot 267}}$

$\Rightarrow \log \sin B/2 = 1/2 \{ \log 19 + \log 466 - \log 61 - \log 267 \}$

$\log \sin B/2 = 1/2 \{ 1,2788 + 2,6684 - 1,7853 - 2,4265 \}$

$= 1/2 (-0,2646) = -0,13230 \qquad \log \sin B/2 = \bar{1},86770$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې د 7374 په عددپورې اړه لري، پس $\sin B/2 = 0,7374$. څکه چې کرکترستیک یې ($\bar{1}$) دی.

اودغه په لاس راغلی sin هم دمثلثاتی نسبتونو په جدول کې شته چې په 47° مخ 30' سطر پورې اړه لري. نو $B/2 = 47° \; 30'$ $\Longleftarrow$ $\hat{B} = 95°$

$\Rightarrow \hat{C} = 179° \; 59' \; 60'' - 133° \; 17' \; 24,6''$

$= 46° \; 42' \; 35,4'' \qquad \Rightarrow \hat{C} = 46° \; 42' \; 35,4''$

پنځلسم سوال: دیوه مثلث د $\bar{b} = 215$ ، $\bar{c} = 105$ او $\hat{A} = 74° \; 27'$ ده، نوموړی مثلث حل کړئ.

حل: د tg دقضیې څخه داستفادې په صورت کې لیکلای شو چې:

$tg \frac{B-C}{2} = \frac{215-105}{215+105} \operatorname{Cotg} \frac{47° \; 27'}{2} = \frac{11}{31} \operatorname{Cotg} 37° \; 13' \; 30''$

$\operatorname{Cotg} 37° \; 13' \; 30''$ په جدول کې نشته دانټرپولېشن په واسطه یې په لاس راوړو:

1/ زاویې	Cotgs یې	2/ دزاویو فرق یې	
37° 14'	1,3159	60''	0,0008
− 37° 13'	1,3167	30''	X
60''	0,0008		

$\Rightarrow X = \frac{30 \cdot 0,0008}{60} \Rightarrow X = 0,0004$

اوس په لاس راغلی عدد دکوچنۍ زاویې د Ctg څخه کموو. یعنې: $1,3167$

$$\begin{array}{r} 1,3167 \\ -\ 0,0004 \\ \hline 1,3163 \end{array}$$

چې د $1,3163$ اعدد عبارت دی د $37^\circ\ 13'\ 30''$ له Ctg څخه یعنې:

$Ctg\ 37^\circ 13' 30'' = 1,3163 \Rightarrow tg\ \frac{B-C}{2} = 0,4 \cdot 1,3161 \doteq 0,52652$

داچې په لاس راغلی tg په جدول کې نشته نو $\frac{B-C}{2}$ دانترپولیشن په واسطه مومو:

$2/$ $0,52652$ دپه لاس راغلې زاویې تانجنت — tg_s یې — زاویې $1/$

دکوچنۍ زاویې تانجنت

$$\begin{array}{r} 0,52652 \\ -\ 0,52650 \\ \hline 0,00002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,52687 \\ -\ 0,52650 \\ \hline 0,00002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27^\circ 47' \\ -\ 27^\circ 46' \\ \hline 60'' \end{array}$$

$3/$ دزاویو فرق — دتانجنتونو فرقونه

دزاویو فرق	دتانجنتونو فرقونه
$60''$	37
X	2

$\Rightarrow X = 3,3'' \Rightarrow \frac{B-C}{2} = 27^\circ\ 46'\ 3,3''$

$\Rightarrow B-C = 55^\circ\ 32'\ 6,6''$ او $B+C = 180^\circ - \hat{A}$

$= 180^\circ\ 74'\ 27''$

$= 105^\circ\ 33'\ 0''$

څرنګه چې $B-C = 55^\circ\ 32'\ 6,6''$

او $B+C = 105^\circ\ 33'\ 0''$

$$\overline{\quad 2B = 160^\circ\ 65'\ 6,6'' \quad}$$

$A+B = 80^\circ\ 32'\ 33,3'' + 74^\circ\ 27'$

$\Rightarrow \hat{B} = 80^\circ\ 32'\ 33,3''$

$\hat{C} = 179^\circ\ 59'\ 60'' - 154^\circ\ 59'\ 33,3''$

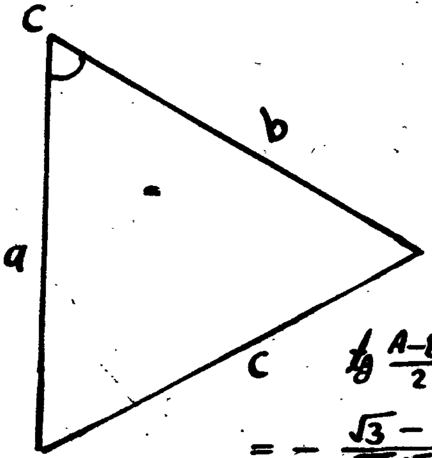
$\hat{C} = 25^\circ\ 26'\ 7'' \Rightarrow 25^\circ\ 26'\ 7''$

د a دضلعې دپیدا کولو لپاره د Cos دقضیې څخه استفاده کوو ، لیکوچې :

$$a^2 = (215)^2 + (105)^2 - 2 \cdot 215 \cdot 105 \, Cos \, 74^\circ 27'$$

دجدول څخه په لاس راوړو $Cos \; 74^\circ \; 27'$ نو a^2 بالاخره a به په لاس راشي .

شپاړسم سوال : دیوه مثلث $a = 2$ ، $b = 1 + \sqrt{3}$ او $\hat{C} = 60^\circ$ دی ، دا مثلث حل کړئ .



حل :

د دې لپاره چې دموږ مثلث د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویې په لاس راوړو ، نو د tg دقضیې څخه استفاده کوو ، لیکوچې :

$$tg \frac{A-B}{2} = \frac{2-1-\sqrt{3}}{2+1+\sqrt{3}} \, Cotg \frac{60}{2}$$

$$= - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \cdot \sqrt{3} = - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Longrightarrow \frac{A-B}{2} = -15 \Longrightarrow A-B = -30^\circ$$

او هم پوهیږو چې $AB = 180^\circ - 60^\circ \Longrightarrow A+B = 120$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} A+B = 120^\circ \\ A-B = -30 \end{array} \Longrightarrow 2A = 90 \Longrightarrow \hat{A} = 45$$

د $A-B = -30$ رابطې څخه لروچې : $B = 45 + 30 \Longrightarrow \hat{B} = 75^\circ$

د c ضلعې دپیدا کولو لپاره د Cos دقضیې څخه استفاده کوو ، لیکوچې ،

$$c^2 = 4 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 \cdot 2 (1 + \sqrt{3}) \cdot \tfrac{1}{2} \Longrightarrow c^2 = 6$$

$$\Longrightarrow c = \sqrt{\frac{12}{2}} \Longrightarrow c = 2\sqrt{1,5}$$

اوولسم سوال : دیوه مثلث یوه زاویه 30° او مجاور اضلاع 40 او $40\sqrt{3}$ دی ، نوموړی مثلث حل کړئ .

یوویشتم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\frac{\operatorname{cotg} a-1}{\operatorname{cotg} a+1}+\frac{\operatorname{cotg} a+1}{\operatorname{cotg} a-1}=\frac{2}{\cos^2 a-\sin^2 a}$$

حل: د نوموړې مطابقت په چپ اړخ کې د دوه کسرونو د جمعې عملیه اجراء کوو لیکو چې:

$$\frac{\operatorname{cotg} a-1}{\operatorname{cotg} a+1}+\frac{\operatorname{cotg} a+1}{\operatorname{cotg} a-1}=\frac{(\operatorname{cotg} a-1)^2+(\operatorname{cotg} a+1)^2}{(\operatorname{cotg} a+1)\ (\operatorname{cotg} a-1)}$$

$$=\frac{(\operatorname{cotg} a-1+\operatorname{cotg} a+1)^2-2(\operatorname{cotg} a-1)(\operatorname{cotg} a+1)}{(\operatorname{cotg}^2 a-1)}$$

$$=\frac{(2\cot a)^2-2(\operatorname{cotg}^2 a-1)}{\operatorname{cotg}^2 a-1}=\frac{4\operatorname{cotg}^2 a-2\operatorname{cotg}^2 a+2}{\operatorname{cotg}^2 a-1}=\frac{2(\operatorname{cotg}^2 a+1)}{\operatorname{cotg}^2 a-1}$$

$$=2\cdot\frac{\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}+1}{\frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}-1}=2\cdot\frac{\frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin^2 a}}{\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin^2 a}}=2\cdot\frac{\frac{1}{\sin^2 a}}{\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin^2 a}}$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sin^2 a}\cdot\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a-\sin^2 a}=2\cdot\frac{1}{\cos^2 a-\sin^2 a}=\frac{2}{\cos^2 a-\sin^2 a}$$

دوه ویشتم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$tg^2 a+\operatorname{cotg}^2 a+2=\sec^2 a\cdot\operatorname{cosec}^2 a$$

حل: د نوموړې مطابقت په چپ اړخ کې آخرنی دوه حده د a^2+b^2 شکل لري او $a^2+b^2=(a-b)^2-2ab$ نو لیکلای شو چې:

$$tg^2 a+\operatorname{cotg}^2 a+2=(tg a+\operatorname{cotg} a)^2-2\,tg a\cdot\operatorname{cotg} a+2$$

$$=(tg a+\operatorname{cotg} a)^2-2+2=\left(tg a+\frac{1}{tg a}\right)^2+0=\left(\frac{1+tg^2 a}{tg a}\right)^2$$

$$=(1+tg^2 a)\cdot\operatorname{cotg} a$$

$$=\frac{1}{\cos^2 a}\cdot\frac{\cos a}{\sin a}$$

$$=\sec a\cdot\operatorname{cosec} a$$

حل ، د tg دقضيې څخه داستفادې په صورت کې ليکلای شو چې :

$$tg\frac{C-B}{2} = \frac{40\sqrt{3}-40}{40\sqrt{3}+40}\ Ctg\ 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \Longrightarrow tg\frac{C-B}{2} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{C-B}{2} = 45 \qquad \Longrightarrow C-B = 90$$

او هم لرو چې : $\Longleftarrow \quad C+B = 180-30 = 150$

$$C+B = 150$$
$$C-B = 90 \Longrightarrow 2C = 240 \Longrightarrow C = 120^\circ$$

د B زاويې د پيداکولو لپاره د $C-B = 90^\circ$ له رابطې څخه استفاده کوو ، ليکو چې :

$$B = C-90 \Longrightarrow \hat{B} = 120-90 = 30 \Longrightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

د a ضلعې د پيداکولو لپاره د Cos دقضيې څخه استفاده کوو ، ليکو چې :

$$a^2 = (40)^2 + (\sqrt{3}\ 40)^2 - 2\cdot 40\cdot 40\cdot\sqrt{3}\cdot Cos\ 30^\circ$$

$$\Longrightarrow a^2 = (40)^2 + 3(40)^2 - 2\cdot(40)^2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Longrightarrow a^2 = (40)^2 + 3(40)^2 - 3(40)^2 \Longrightarrow a^2 = (40)^2 \Longrightarrow a = 40$$

نو معلومه شوه چې مثلث متساوی الساقين دی .

اتلسم سوال : ديوه مثلث دوه ضلعې $\sqrt{3}+1$ او $\sqrt{3}-1$ او په منځ کې زاويه

چې 60° ده ، نو موږ مثلث حل کړئ .

حل : فرضاً $\bar{b} = \sqrt{3}-1$ او $\bar{C} = \sqrt{3}+1$ او $\hat{A} = 60^\circ$ وی ، د tg دقضيې څخه د

داستفادې په صورت کښې ليکلای شو چې :

$$tg\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}\cdot Ctg\frac{60^\circ}{2} = \frac{-2}{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} = -1$$

$$\Longrightarrow tg\frac{B-C}{2} = 1$$

ځکه چې $tg\frac{B-C}{2} = -tg\frac{C-B}{2} \Longrightarrow \quad tg\frac{C-B}{2} = 1$

$$\Longrightarrow \frac{C-B}{2} = 45^\circ \Longrightarrow \hat{C}-\hat{B} = 90^\circ$$

لدبله طرفه لرو چې : $C+B=180°-60° \Rightarrow C+B=120°$ اوس لیکو چې :

$$C+B=120°$$
$$C-B=90° \quad \overset{+}{\Longrightarrow} \quad 2C=210 \Longrightarrow \hat{C}=105°$$

$$C-B=90° \Longrightarrow B=105-90° \Longrightarrow B=15°$$

د a ضلعې د پيدا کولو لپاره د Cos د قضيې څخه استفاده کوو ، ليکو چې :

$$a^2=c^2+b^2-2bc\,Cos\,a$$

$$\Longrightarrow a^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2-2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\,Cos\,60$$

$$\Longrightarrow a^2=(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)^2-2(3-1)-2(3-1)\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$=4\cdot3-4-2=6 \quad \Longrightarrow a=\sqrt{\frac{12}{2}}=2\sqrt{16{,}5}$$

نولسم سوال : ديوه مثلث اضلاع $a=21$ او $b=11$ او $\hat{C}=34°42'30''$

ده ، نوموړی مثلث حل کړئ .

حل : د A او B زاويو د پيدا کولو لپاره د tg د قضيې څخه استفاده کوو ، ليکو :

$$tg\,\frac{A-B}{2}=\frac{21-11}{21+11}\,Cotg\,17°\,21'\,15''$$

په جدول کې نشته د انترپولیشن په واسطه نوموړې نسبت په لاس $Cotg\,17°\,21'\,15''$

راوړو .

1/ زاويې   يې $Cotgs$ 2/

$$17°\,22' \qquad -3{,}1975 \qquad\qquad 60'' \qquad 0{,}0033$$

$$-17°\,21' \qquad 3{,}2008 \qquad\qquad 15'' \qquad X$$

$$\overline{60''} \qquad \overline{0{,}0033} \qquad\qquad X=\frac{15\cdot0{,}0033}{60}$$

$$\Longrightarrow X=0{,}000{,}825 \qquad 3/ \quad \begin{array}{r} 3{,}200800 \\ -0{,}000825 \\ \hline 3{,}199975 \end{array}$$

$$\Rightarrow Ctg\ 17^\circ\ 21'\ 15'' = 3,199975 \qquad \approx 3,2$$

$$\Rightarrow tg\ \frac{A-B}{2} = \frac{1}{3,2} \cdot 3,2 \qquad \Rightarrow tg\ \frac{A-B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A-B}{2} = 45^\circ \qquad \Rightarrow A-B = 90^\circ$$

له بله طرفه $A+B = 180^\circ - 34^\circ\ 42'\ 30''$ $\Rightarrow$ $A+B = 145^\circ\ 17'\ 30''$

اوس دمعادلو په لاس راغلی سیستم حل کوو، یعني:

$$A+B = 145^\circ\ 17'\ 30''$$

$$A-B = 90^\circ\ 0'\ 0''$$

$$\Rightarrow 2A = 235^\circ\ 17'\ 30'' \qquad \Rightarrow A = 117^\circ\ 23'\ 15''$$

د B زاویې دپیداکولو لپاره $B = A - 90$ څخه استفاده کوو، لیکو چې:

$$\hat{B} = 117^\circ\ 23'\ 15'' - 90 \qquad \Rightarrow \hat{B} = 27^\circ\ 23'\ 15''$$

د C ضلعې دپیداکولو لپاره د Cos دقضیې څخه استفاده کوو، لیکو چې:

$$c^2 = (21)^2 + (11)^2 - 2 \cdot 21 \cdot 11\ Cos\ 34^\circ\ 42'\ 30''$$

د $Cos\ 34^\circ\ 42'\ 30''$ دانټرپولیشن په واسطه پیداکوو ځکه چې په جدول کې نشته.

1/ زاویې	کوساینونه یې	2/ دزاویو فرق	دکوساینونو فرق
$34^\circ\ 43'$	0,82198	$60''$	0,00016
$-34^\circ\ 42'$	$-0,82214$	$30''$	X
$60''$	0,00016		$\Rightarrow X = 0,00008$

اوس نو X دکوچنۍ زاویې دکوساین څخه کموو، دتفریق حاصل یې زموږ مطلب دی.

3/ $0,82214 - 0,00008 = 0,82206$ $\Rightarrow Cos\ 34^\circ\ 42'\ 30'' = 0,82206$

$$\Rightarrow c^2 = 1024 - 845,46 = 178,54$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{178,54} \qquad c \approx 13,4$$

شپږم سوال: دیوه مثلث د $\hat{A} = 72°48'36''$ ، $\bar{c} = 70$ او $\bar{b} = 90$ دی، نوموړی مثلث حل کړئ.

حل: د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ د tg دقضیې په واسطه په لاس راوړای شو، یعنې:

$$tg\frac{B-C}{2} = \frac{90-70}{90+70}\, Ctg\, 36°24'15''$$

$Ctg\, 36°24'15''$ په جدول کې نشته د انترپولېشن په واسطه یې مومو:

۱/ زاویې	Ctg قیمتونه یې	۲/ دزاویوفرق	دکوتانجنتونوفرق
36°25'	−1,3555	60''	0,0009
−36°24'	1,3564	15	X
60''	0,0009		

$$\Rightarrow X = 0,0002$$

اوس د 0,0002 عدد دکوچنۍ زاویې د Ctg څخه کموو. کوم عدد چې ورڅخه په لاس راځي هغه زموږ مطلب دی، یعنې:

$$1,3564 - 0,0002 = 1,3562$$

$$\Rightarrow tg\frac{B-C}{2} = \frac{1}{8}\cdot 1,3562 = 0,16953$$

د $\frac{B-C}{2}$ زاویه دانترپولېشن په واسطه په لاس راوړو، ځکه چې په لاس راغلی tg په جدول کې نشته.

۱/ زاویې	tg قیمتونه یې	۲/ دزاویوفرق	دتانجنتونوفرقي
9°38'	0,16974		
−9°37'	−0,16944	60''	0,00030
60''	0,00030	X	0,0009

$$\Longrightarrow X = 18''$$

اوس $18''$ زاویه دکوچنۍ زاویې سره جمع کوو $\frac{B-C}{2}$ په لاس راځي .

$$\Longrightarrow \frac{B-C}{2} = 9^\circ\ 37'+18'' \quad \Longrightarrow \frac{B-C}{2} = 9^\circ\ 37'\ 18''$$

$$\Longrightarrow B-C = 19^\circ\ 14'\ 36'' \quad \ldots\ I$$

هدارنګه لرو چې $B+C=180^\circ-\hat{A}$

$$\Longrightarrow B+C = 179^\circ\ 59'\ 60'' - 72^\circ\ 48'\ 30'' = 107^\circ\ 11'\ 30'' \quad \ldots\ II$$

اوس دواړو معادلې طرف په طرف جمع کوو ، یعنې :

$$B+C = 107^\circ\ 11'\ 30''$$
$$B-C = 19^\circ\ 14'\ 36''$$

$$\overset{+}{\Longrightarrow} 2B = 126^\circ\ 26'\ 6''$$

$$\Longrightarrow \hat{B} = 63^\circ\ 13'\ 3''$$

د $\hat{C}$ د I معادلې څخه په لاندې ډول په لاس راوړو :

$$\hat{C} = \hat{B} - 19^\circ\ 14'\ 36'' \quad \Longrightarrow \hat{C} = 63^\circ\ 13'\ 3'' - 19^\circ\ 14'\ 36''$$
$$= 43^\circ\ 58'\ 27''$$

د Cos دقضیې څخه د استفادې په صورت کې کولای شو چې د $\bar{a}$ په لاس راوړو:

$$a^2 = (90)^2 + (70)^2 - 2\cdot 90 \cdot 70\ Cos\ 72^\circ\ 48'\ 30''$$

په جدول کې د نشته دانتر پولیشن په واسطه یې به لاس راوړو $Cos\ 72^\circ\ 48'\ 30''$.

زاوېې ۱/	Cos مونډه یې	د زاویو فرق/2	د کوساینونو فرق یې
$72^\circ\ 49'$	$-0{,}29543$	$60''$	$0{,}00028$
$-72^\circ\ 48'$	$0{,}29571$	$30''$	X
$60''$	$0{,}00028$		$\Longrightarrow X = 0{,}00014$

اوس نو د ۰۰۰۱۴ ره عدد دکوچنۍ زاویې د Cos څخه کموو مطلوب به لاس راځي،

یعني

$$3/\quad 0{,}29571$$
$$-\,0{,}00014$$
$$\overline{0{,}29557} \Longrightarrow \cos 72^\circ\, 48'\, 30'' = 0{,}29557$$

$$\Longrightarrow a^2 = 13000 - 126 \cdot 29{,}557 = 9275{,}8180$$

$$\Longrightarrow a = 96{,}3 \ldots$$

یوویشتم سوال: دیوه مثلث $b=2265$ او $C=1779$ ، $\hat{A} = 58^\circ\, 18''$ دی

موجوده مثلث حل کړئ.

حل: د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو دپیداکولو لپاره د tg دقضیې څخه استفاده کوو، لیکو چې:

$$tg\,\frac{B-C}{2} = \frac{2265-1779}{2265+1779}\, Cotg\, \frac{58^\circ\, 18''}{2}$$

$$\Longrightarrow tg\,\frac{B-C}{2} = \frac{81}{674} \cdot Cotg\, 29^\circ\, 9''$$

$Cotg\ 29\ 9''$ په جدول کې نشته دا منترپولیشن په واسطه یې په لاس راوړو:

1/ زاویې	Cotg قیمتونه	2/ دزاویو فرق	د Cotg تونو فرق	3/ 1,80400
29° 1'	1,8028	60''	0,0012	−0,00018
29	1,8040	9''	x	1,80382
60''	0,0012			

$$\Longrightarrow Cotg\, 29^\circ\, 9'' = 1{,}8039$$

$$\Longrightarrow tg\,\frac{B-C}{2} = \frac{81}{674} \cdot 1{,}8039 \Longrightarrow tg\,\frac{B-C}{2} = 0{,}2142$$

په لاس راغلي tg په جدول کې نشته د $\frac{B-C}{2}$ دموندلو لپاره دا منترپولیشن څخه استفاده کوو، یعني:

(په بل مخ کې)

زاوي	ٹونه ي	٪٢		
12° 10′	0,2156	0,2142	10′	30
12°	0,2126	− 0,2126	X	16
10′	0,0030	0,0016		

$$\Rightarrow x = \left(\frac{16 \cdot 10}{30}\right)' \Longrightarrow x = X = 5' \, 19'' \Longrightarrow \frac{B-C}{2}$$

$$= 12^\circ \, 5' \, 19'' \Longrightarrow B - C = 24^\circ \, 10' \, 38'' \quad \ldots \quad I$$

له بله پلوه: $B + C = 179^\circ \, 59' \, 60'' - 58^\circ \, 18'' = 121^\circ \, 59' \, 42'' \ldots II$

اوس I او II رابطې طرف په طرف جمع کوو، ليکو چې:

$$2B = 146^\circ \, 25' \, 6'' \Longrightarrow B = 73^\circ \, 12' \, 33''$$

څرنګه چې: $\hat{C} = \hat{B} - 24^\circ \, 10' \, 38'' \Longrightarrow \hat{C} = 73^\circ \, 12' \, 33'' - 24^\circ \, 10' \, 38''$

$$\hat{C} = 49^\circ \, 1' \, 55''$$

د a ضلع د Cos دقضيې په واسطه په لاس راورلای شو داسې چې:

$$a^2 = (2265)^2 + (1779)^2 - 2 \cdot 2265 \cdot 1779 \, \text{Cos} \, 58^\circ \, 18''$$

څرنګه چې Cos 58° 18″ په جدول کې نشته نو د انترپولېشن په واسطه يې په لاس راوړو.

زاوي ٪	کوساينونه	٪ دزاويوفرق	دکوساينونو فرق
58° 1′	0,52967	60″	0,00025
58	0,52992	18″	X
	0,00025		

$$\Longrightarrow X = 0,00008$$

$$3/\quad \begin{array}{r} 0,52992 \\ 0,00008 \\ \hline 0,52984 \end{array} \Longrightarrow \cos 58^{\circ} 18'' = 0,52984$$

$$\Longrightarrow a^2 = (2265)^2 + (1779)^2 - 2(2265)(1779)(0,52984)$$

$$\Longrightarrow a = \sqrt{\quad}$$

دوهویشتم سوال، آیا د $\sin A = \frac{3}{4}$ ، $b=7$ او $a=5$ په مثلث کې ابهام شته؟

ځواب، څرنګه چې $a \sin A = \frac{15}{4}$ او $b=7$ ، نو معلومه ده چې $\frac{15}{4} < 7$ اوهم $b > a$ ، ځکه چې $7 > 5$ ، نو پورتنۍ مسئله کې ابهام شته او د شرط له مخې نوموړې مسئله (مثلث) یوحل لري.

درویشتم سوال، دیوه مثلث $\hat{A}=45^{\circ}$ ؛ $\bar{c}=\sqrt{3}+1$ او $\bar{a}=2$ ده، نوموړې مثلث حل کړئ.

حل، د Sin دقضیې څخه داستفادې په صورت کې کولای شو چې د $\hat{C}$ زاویه په لاس راوړو.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Longrightarrow \sin C = c \cdot \frac{\sin A}{a}$$

یا $\sin C = (\sqrt{3}+1)\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) \Longrightarrow \sin C = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Longrightarrow C = 75^{\circ}$

د Cos دقضیې څخه داستفادې په صورت کې د b ضلع په لاس راوړو، خو لومړی د B زاویه او بیا د b ضلع په لاس راوړو:

$1/:\ \hat{B} = 180 - (A+B)$

$B = 180 - 120 = 60^{\circ}$

$2/\ \ b^2 = 4 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{2} = 6 \Longrightarrow b = \sqrt{6}$

خلورمتم سوال : لاندې مثلث حل کړئ : $\hat{C} = 30$ ، $b = 100\sqrt{3}$ او $a = 100$.

حل : د tg دقضیې څخه د استفادې په صورت کې د B او A زاویې په لاس

راورلای شو، د اسې چې :

$$tg\frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a}\ Cot\ C/2 \Longrightarrow tg\frac{B-A}{2} = \frac{100\sqrt{3}-100}{100\sqrt{3}+100}\ Ctg\ 15^\circ$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{100(\sqrt{3}+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \Longrightarrow tg\frac{B-A}{2} = 1 \Longrightarrow \frac{B-A}{2} = 45^\circ$$

$$\Longrightarrow B-A = 90^\circ$$

له بل پلوه څرنګه چې $\hat{B} + \hat{A} = 180 - \hat{C} \Longleftarrow B+A = 180^\circ - 30 = 150^\circ$

$$B + A = 150^\circ$$

$$B - A = 90^\circ \overset{+}{\Longrightarrow} 2B = 240 \Longrightarrow B = 120^\circ$$

د $\hat{A}$ د $B-A=90^\circ$ له رابطې څخه په لاس راورو، یعنې :

$$A = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Longrightarrow \hat{A} = 30^\circ$$

د Cos دقضیې په واسطه د $\bar{C}$ ضلع په لاس راورو ، یعنې :

$$C^2 = (100)^2 + (100\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 100 \cdot 100\sqrt{3} \cdot Cos\ 30^\circ$$

$$= 4(100)^2 - 2 \cdot (100)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4(100)^2 - 3(100)^2$$

$$= (100)^2 \Longrightarrow C = 100$$

پنځه ویشتم سوال ، لاندې مثلث حل کړئ : $\hat{A} = 30^\circ$ ، $b = 8$ او $a = 6$.

حل : د Sin دقضیې څخه د استفادې په صورت کښې د B زاویه په لاس راورلای شو، یعنې

$$\frac{Sin(30)}{6} = \frac{Sin B}{8} \Longrightarrow Sin B = \frac{8 \cdot \frac{1}{2}}{6} = 0,66666$$

په لاس راغلی Sin په جدول کښې نښته نو د $\hat{B}$ زاویې دموندلو لپاره دانترپولیشن څخه

استفاده کوو ،

1/ زاویې	Sin مونه یې
$-41^\circ 48'$	$-0,66653$
$41^\circ 49'$	$0,66675$
$60''$	$0,00022$

2/

$$0,66666 \leftarrow \text{په لاس راغلی ساین}$$
$$-0,66653 \leftarrow \text{دکوچنی زاویې ساین}$$
$$0,00013$$

3/ دزاویو فرق	دساینونو فرق
$60''$	22
X	13

$$\Longrightarrow X = (35,5'') \Longrightarrow \hat{B} = 41^\circ 48' + 35,5'' = 41^\circ 48' 35,5''$$

د $\hat{C}$ زاویه د $C = 180 - (A+B)$ رابطې څخه په لاس راوړلای شو، یعنې:

$$\hat{C} = 179^\circ 59' 60'' - 71^\circ 48' 35,5'' \Longrightarrow \hat{C} = 108^\circ 11' 24,5''$$

د کوساینو دقضیې څخه د استفادې په صورت کې د $\bar{C}$ ضلع په لاس راوړلای شو، یعنې:

$$C^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 48 \ \mathrm{Cos}\ 108^\circ 11' 24,5'' = 100 - 96[\mathrm{Cos}(90 + 18^\circ 11' 24,5'')]$$

$$= 100 - 96[-\mathrm{Sin}\ 18^\circ 11' 24,5''] = 100 + 96\ \mathrm{Sin}\ 18^\circ 11' 24,5''$$

$18^\circ 11' 24,5''$ په جدول کې دانترپولیشن په واسطه یې په لاس راوړو:

1/ زاویې	Sin مونه یې
$18^\circ 12'$	$0,31233$
$-18^\circ 11'$	$-0,31206$
$60''$	$0,00027$

2/	
$60''$	$0,00027$
$24,5''$	X

$$\Longrightarrow X = 0,00011$$

3/

$$0,31206$$
$$0,00011$$
$$0,31217$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Sin}\ 18^\circ 11' 24,5'' = 0,31217 \Longrightarrow C^2 = 100 + 96 \cdot 0,31217$$

$$\Longrightarrow C^2 = 130,0480 \Longrightarrow C \approx 11,22$$

دریشتم سوال: ثبوت کړئ چې: $\sin^6 a+\cos^6 a=1-3\sin^2 a\cos^2 a$

حل: دنوموړی مطابقت چپه خواد a^6+b^6 شکل لري او

$(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$ ونو لیکلای شو چې:

$$\sin^6 a+\cos^6 a=(\sin^2 a)^3+(\cos^2 a)^3=(\sin^2 a+\cos^2 a)(\sin^4 a-\sin^2 a\cdot\cos^2 a+\cos^4 a)$$

$$=1\cdot[(\sin^2 a)^2+(\cos^2 a)^2-\sin^2 a\cos^2 a]$$

$$=[(\sin^2 a+\cos^2 a)^2-2\sin^2 a\cos^2 a-\sin^2 a\cos^2 a]$$

$$=[1-3\sin^2 a\cos^2 a]=1-3\sin^2 a\cos^2 a$$

شلېریشتم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$tg^2 a-\sin^2 a=\sin^4 a\sec^2 a$$

حل: دپورتنی مطابقت په چپه خواکې د tga په عوض د هغه

قیمت ږدو لیکو چې:

$$tg^2 a-\sin^2 a=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}-\sin^2 a$$

$$=\frac{\sin^2 a-\cos^2 a\sin^2 a}{\cos^2 a}=\frac{\sin^2 a(1-\cos^2 a)}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos^2 a}\cdot\sin^2 a\cdot\sin^2 a$$

$$=\sec^2 a\cdot\sin^4 a$$

پنځه ویشتم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$(\sin a+\operatorname{cosec} a)^2+(\cos a+\sec a)^2=tg^2 a+ctg^2 a+7$$

حل: دنوموړی مطابقت په چپه خواکې د $\sec a$ او $\operatorname{cosec} a$ مساوی

قیمتونه ږدو لیکو چې:

$$\left(\sin a+\frac{1}{\sin a}\right)^2+\left(\cos a+\frac{1}{\cos a}\right)^2=$$

$$=\sin^2 a+2\sin a\cdot\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin^2 a}+\cos^2 a+2\cos a\cdot\frac{1}{\cos a}+\left(\frac{1}{\cos a}\right)^2$$

$$=\sin^2 a+2+\frac{1}{\sin^2 a}+\cos^2 a+2+\frac{1}{\cos^2 a}=\sin^2 a+\cos^2 a+4+\frac{1}{\sin^2 a}+\frac{1}{\cos^2 a}$$

$$=5+\frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin^2 a\cos^2 a}=5+\frac{\cos^2 a+\sin^2 a}{\sin^2 a}\cdot\frac{\sin^2 a+\cos^2 a}{\cos^2 a}$$ (پاتې بل مخ کې)

شپږویشتم سوال : هغه مثلث چې عناصر يې $A = 45^\circ$ ، $b = 4$ او $a = 5$ دی، حل کړئ.

حل : د B زاويې دموندلولپاره د Sin دقضيې څخه استفاده کوو، يعنې :

$$\frac{\sin 45^\circ}{5} = \frac{\sin B}{4} \Longrightarrow \sin B = 2\sqrt{2}/5 \Longrightarrow \sin B = 0{,}28300$$

د B دزاويې په لاس راغلی Sin په جدول کې نشته د انترپولېشن څخه کار اخلو:

/1 زاويې	ساينونه يې	/2	/3 دزاويوفرق	دساينونوفرق
$16^\circ\ 27'$	0,28318	0,28300	$60''$	28
$-16^\circ\ 26'$	$-0{,}28290$	$-0{,}28290$	X	10
$60''$	0,00028	0,00010		

$$\Longrightarrow X = \frac{150}{7} = \approx 21{,}5''$$

$$\Longrightarrow \hat{B} = 16^\circ\ 26'\ 21{,}5''$$

د $\hat{C}$ زاويې دموندلولپاره د $\hat{C} = 180 - (A + B)$ رابطې څخه استفاده کوو :

$$\Longrightarrow \hat{C} = 179^\circ\ 59'\ 60'' - 61^\circ\ 26'\ 21{,}5'' = 118^\circ\ 33'\ 38{,}5''$$

د $\overline{C}$ ضلعې د پيداکولو لپاره د Cos دقضيې څخه استفاده کوو :

$$C^2 = 25 + 16 - 40\left[\cos(90 + 28^\circ\ 33'\ 38{,}5'')\right]$$

$$\Longrightarrow C^2 = 41 + 40 \sin 28^\circ\ 33'\ 38{,}5''$$

$\sin 28^\circ\ 33'\ 38{,}5''$ په جدول کې نشته نو د انترپولېشن په واسطه يې په لاس راوړو:

/1 لومړی قدم : زاويې	ساينونه يې	/2 دويم قدم : دزاويوفرق	دساينوفرقونه
$28^\circ\ 34'$	0,47818	$60''$	0,00025
$28^\circ\ 33'$	$-0{,}47793$	$38{,}5''$	X
$60''$	0,00025		

$$\Longrightarrow X = 0{,}00003$$

3/ دریم قدم :

$$\begin{array}{r} 0{,}47793 \\ 0{,}00003 \\ \hline 0{,}47796 \end{array} \Longrightarrow \cos 28^\circ 53' 38{,}5'' = 0{,}47796$$

$$\Longrightarrow c^2 = 41 + 40 \cdot 0{,}47796$$

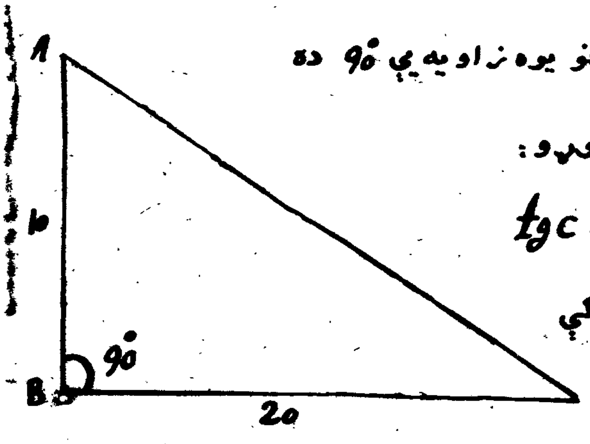
$$\Longrightarrow c^2 = 60{,}1184$$

$$\Longrightarrow c = 7{,}75$$

د دوولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

لسم تمرین

لومړے سوال ، د یوه قایم الزاویه مثلث دوه قایمي ضلعې په ترتیب سره (10) او 20 سانتي متره دی ، نو موړے مثلث حل کړئ .



حل : داچې مثلث قایم الزاویه دی ، نو یوه زاویه یې $90°$ ده

د C زاویه په لاندې ډول په لاس راوړو :

$$tgC = \frac{10}{20} \Rightarrow tgC = 0{,}50000$$

څرنګه چې په لاس راغلی tg په جدول کې نشته ، نو $\hat{C}$ د انټرپولیشن په واسطه په لاس راوړو :

1/ زاویې — تانجنتونه یې

$26°34'$ — $0{,}50004$

$-26°33'$ — $-0{,}49967$

$60''$ — $0{,}00037$

2/ $0{,}50000$
$-0{,}49967$
$0{,}00033$

3/ $60''$ — 37
X — 33

$$\Rightarrow X = 53{,}5''$$

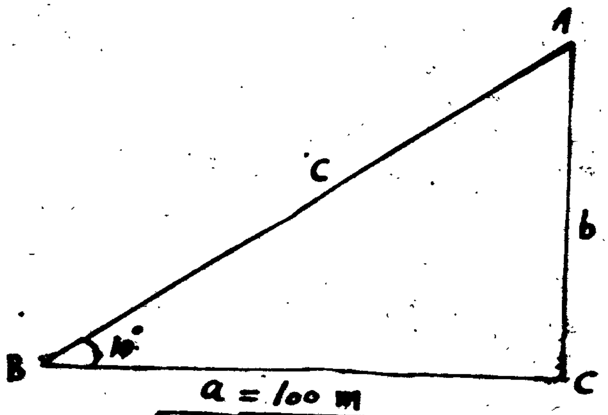
څلورم قدم کښې: $5''$ ر 53 دکوچنۍ زاویې سره یې جمع کوو، مطلب مو په لاس راځي:

$$\hat{C} = 26^\circ\ 33'\ 53,5''$$

$$\hat{A} = 90 - \hat{C} \Longrightarrow \hat{A} = 89^\circ\ 59'\ 60'' - 26^\circ\ 33'\ 53,5'' = 63^\circ\ 26'\ 6,5''$$

$$b^2 = c^2 + a^2 \Longrightarrow b^2 = 100 + 400 \Longrightarrow b = 10\sqrt{5}$$

دویم سوال: دیوه سړک میل دافقي سطحې سره په مشابه ډول 10° دی، معلوم کړئ چې 100 متره وروسته څومره ارتفاع اخلي؟



حل: پوهېږو چې: $tg\,10 = \frac{b}{100m}$

$$\Longrightarrow b = 100m \cdot tg\,10$$

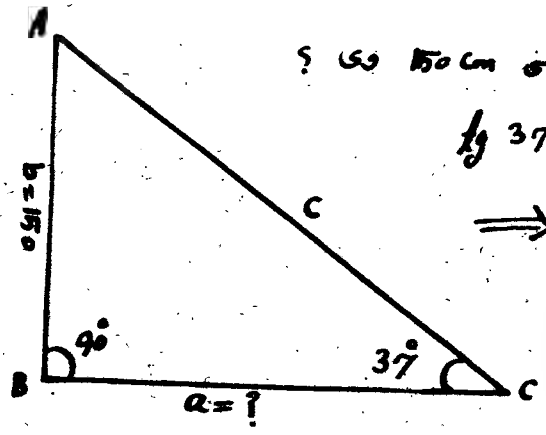
$$= 100 \cdot 0,17633\ m$$

$$\Longrightarrow b = 17,633\ m$$

$$\hat{A} = 90^\circ - 10^\circ \Longrightarrow \hat{A} = 80^\circ$$

د $\overline{C}$ ضلع داړنګه په لاس راوړلای شوچي: $C = \sqrt{(100)^2 + (17,633)^2}$

درېیم سوال: دلمر ارتفاع دافق سره 37° ده، دیوه برج دسیوري اوږدوالی په دې شرط سره معلوم کړئ چې دهغه اوږدوالی 150 cm وي؟



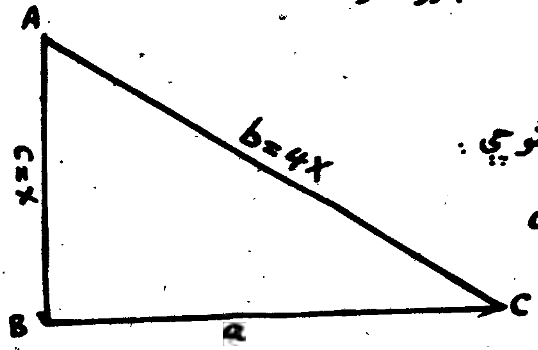
حل: $tg\,37^\circ = \frac{150}{a} \Longrightarrow a = \frac{150}{tg\,37}\ cm$

$$\Longrightarrow a = \frac{150}{0,75355}\ cm$$

$$\Longrightarrow a = \approx 198\ Cm$$

او $\hat{B} = 90^\circ - 37^\circ \Longrightarrow \hat{B} = 53^\circ$

څلورم سوال: دهغه مثلث حادې زاویې پیدا کړئ چې دقایم وتر اوږدوالی یې دهغې ارتفاع څلور کرته وي چې پر وتر باندې دقایم راس نه رسم کېږي؟



حل : منظر په شرط د سوال سره که $C = X$ وبناپوء نو معلومه ده چې $b = 4X$ کیږي .

دفیثاغورث دقضیې په اساس لیکلای شو چې :

$$a^2 = (4)^2 - X = 16X^2 - X^2 = 15X^2 \Rightarrow a = \sqrt{15}X$$

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لیکلای شو چې : $tg\,C = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow tg\,C = \frac{X}{\sqrt{15}X} \Rightarrow tg\,C = \frac{1}{\sqrt{15}} \Rightarrow tg\,C = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\Rightarrow Log\,tg\,C = 0 - \frac{1}{2}Log\,15 = -1,17609 \cdot \frac{1}{2} \quad (0,58808)$$

$$= -0,58804 \Rightarrow Log\,tg\,C = \bar{1},41191$$

په لاس راغلی مانتیس په جدول کې شته ، نو کولای شو چې ولیکو: $tg\,C = 0,25820$

په لاس راغلی tg د مثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د $\hat{C}$ دانترپولیشن په واسطه پیداکوو :

1/ زاویې — تانجنتونه یې

$14°\,29'$ — $0,25831$

$14°\,28'$ — $-0,25800$

$60''$ — 31

2/ $0,25820$

$-0,25800$

$0,000200$

3/ د زاویو فرق — د تانجنتونو فرق

$60''$ — 31

X — 20

$$\Rightarrow X = \left(\frac{20 \cdot 60}{31}\right) \Rightarrow X = 38,9''$$

اوس X د کوچنۍ زاویې سره جمع کوو ، مطلوب موږ په لاس راغئ یعنې ،

$$\hat{C} = 14°\,28'\,38,9''$$

د $\hat{A}$ زاویه د $A = 90° - C$ رابطې څخه په لاس راوړو :

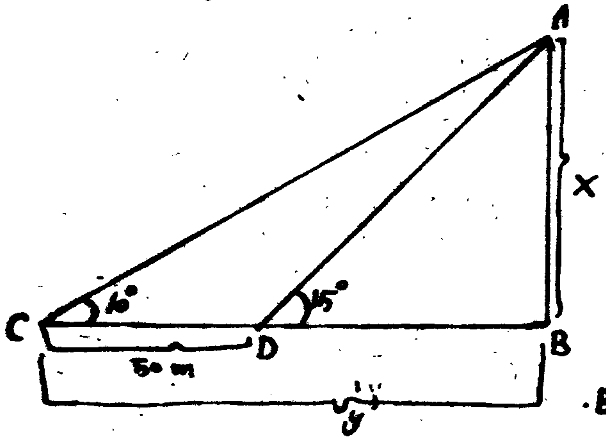
$$\Rightarrow \hat{A} = 89°\,59'\,60'' - 14°\,28'\,38,9'' \Rightarrow \hat{A} = 75°\,41'\,21,1''$$

I

ددولسم ټولګي دمثلثاتو مربوط سوالونه...

یوولسم تمرین

لومړی سوال : یو سړی دیو منارخواته روان وو ، په یوه نقطه کې یې دمنار دڅوکې دارتفاع زاویه 10° وموندله، خوچې 50 متره فاصله یې نوره هم ووهله دارتفاع زاویه یې 15° وموندله . دمنار ارتفاع معلومه کړئ ؟



حل : که دمنار ارتفاع په X متره وښایو، نو د $A\hat{B}C$ په قایم الزاویه مثلث کې لروچې :

$$tg\,10^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{tg\,10^\circ} \quad \dots I$$

که شکل ته وکتل شي نو: $BD = y - 50$.

د $A\hat{B}D$ په قایم الزاویه مثلث کې لروچې :

$$tg\,15^\circ = \frac{x}{y-50} \Rightarrow y - 50 = \frac{x}{tg\,15^\circ}$$

یا

$$y = \frac{x}{tg\,15^\circ} + 50 \quad \dots II$$

د I او II رابطو دمقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې :

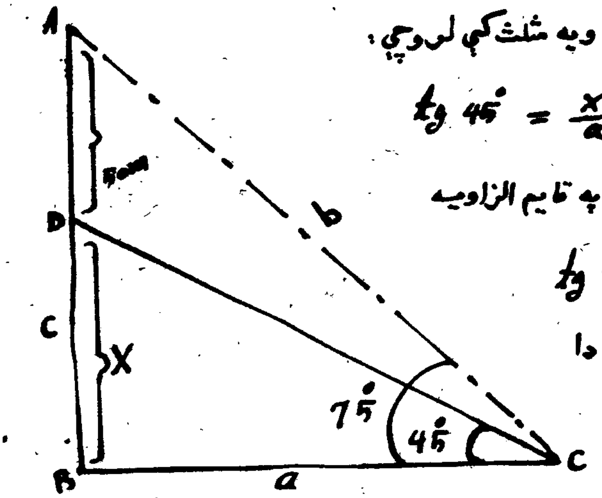
$$\Rightarrow x\,tg\,15^\circ = x\,tg\,10^\circ + 50\,tg\,10^\circ\,tg\,15^\circ \Rightarrow x = \frac{50\,tg\,10^\circ \cdot tg\,15^\circ}{tg\,15^\circ - tg\,10^\circ}$$

$$\Rightarrow x = \frac{50 \cdot 0{,}17633 \cdot 0{,}26795}{0{,}26795 - 0{,}17633} = \frac{50 \cdot 0{,}0472492235}{0{,}09162}$$

$$\simeq \frac{50 \cdot 0{,}0473}{0{,}0917} = \frac{50 \cdot 473}{917} = \frac{23650}{917} = 25{,}78\ m$$

دویم سوال : دیوې غونډۍ په سر یوه ودانۍ ده ، دځمکې د سطحې له یوې نقطې د ودانۍ دځوکې او د ودانۍ د بیخ د ارتفاع زاویې 75° او 45° لوستل کیږي. که د ودانۍ ارتفاع $50m$ وي نو دغونډۍ ارتفاع محاسبه کړئ .

حل ، معلومه ده چې دغونډۍ او ودانۍ مجموعي ارتفاع $X + 50$ ده. داچې D د ودانۍ د بیخ نقطه ده نو د DBC په قایم الزاویه مثلث کې لروچې:



$$tg\,45^\circ = \frac{x}{a} \Longrightarrow x = a \;\dots\; I$$

A د ودانۍ دځوکې نقطه ده نو د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لروچې:

$$tg\,75^\circ = \frac{x+50}{a}$$

داولې رابطې دځیرکتو په نتیجه کې دا پاس رابطه داړنګه لیکلای شو چې:

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{x+50}{x} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sqrt{3}\,x + x = \sqrt{3}\,x + 50\sqrt{3} - x - 50$$

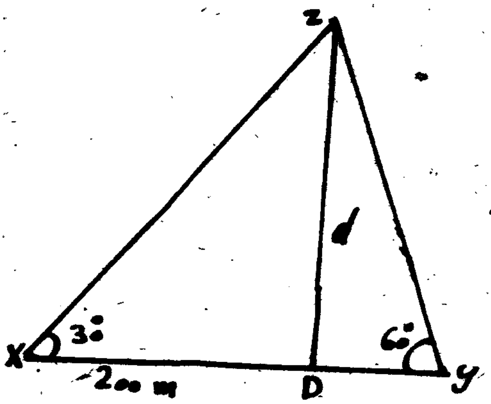
$$\Longrightarrow 2x = 50(\sqrt{3}-1) \Longrightarrow x = 25(1,732-1)$$

یا $x = 25 \cdot 0,732 \approx 18,300\,m$

دریم سوال ، یو نفر د XY ساحل په نقطه ولاړ دی او په مقابل غاړه کې یې د Z یوه نقطه په نظر کې ونیوله او موندلې یې کړه چې د XZ او XY په منځ کې زاویه 30° ده. که د Y له نقطې نه د $Z\hat{Y}X$ زاویه 60° او $XY = 200\,m$ وي ، د ساحل سور معلوم کړئ .

حل : د Z له نقطې څخه په XY یو عمود رسموو ، فرضاً مقابل خط د D په نقطه کې قطع کړي.

که شکل ته وګورو، لیکلای شو چې : $DY = 200 - XD$



۱- د ZDY په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$\frac{d}{200-XD} = tg\,60^\circ \quad \dots\dots I$$

همدارنګه د ZDX په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,30^\circ = \frac{d}{XD} \quad \dots\dots II$$

د I او II رابطو په متقابله نتیجه کې لیکلای شو چې:

$$\frac{XD}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,(200 - XD) \Rightarrow XD = 600 - 3XD$$

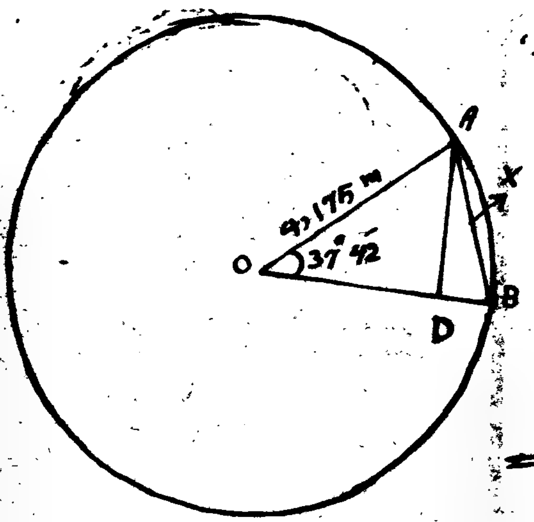
یا $4XD = 600 \Rightarrow XD = 150\ m$

لرو چې : $DY = 200 - XD \Longleftarrow 50m = DY = 200 - 150$

نو په اوله رابطه کې د XD مساوي قیمت وضع کړو، په لاس راځي چې :

$$d = 50 \cdot tg\,60 = 50 \cdot 1,732 = 86,60\ m$$

څلورم سوال : په یوه دایره کې چې شعاع یې $4,175\ m$ وي، هغه مرکزي زاویه چې د $37^\circ\,42'$ سره مساوي ده د مقابل وتر طول یې پیدا کړئ.



حل : د A د نقطې څخه په OB عمود رسموو،

څرنګه چې OA او OB د دایرې شعاعې دي،

نو $\hat{B} = \hat{A} \dots I$. د بل طرف نه د OAB

په متساوي الساقین مثلث کې:

$$\hat{A} + \hat{B} + 37^\circ\,42' = 180^\circ$$

$$\Longrightarrow \hat{A} + \hat{B} = 179^\circ\,60' - 37^\circ\,42'$$

$$= 142^\circ\,18'$$

د اولې رابطې څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې :
$2A = 142^\circ 18'$

$\Longrightarrow A = 71^\circ 9' \Longrightarrow B = 71^\circ 9'$

۱– د ADO په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$\sin 37^\circ 42' = \frac{AD}{4,175\,m} \Longrightarrow AD = 4,175 \sin 37^\circ 42' \,(m) \quad \ldots\ldots II$$

2– د ADB په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې ،

$$\sin 71^\circ 9' = \frac{AD}{X} \Longrightarrow AD = X \sin 71^\circ 9' \quad \ldots\ldots III$$

د II او III اړیکو د پرتلې په نتیجه کې لیکلای شو چې :

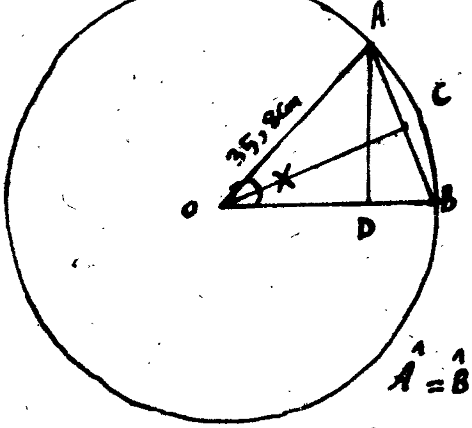
$$X \sin 71^\circ 9' = 4,175 \sin 37^\circ 42' \,(m)$$

$$\Longrightarrow X = \frac{4,175 \sin 37^\circ 42'}{\sin 71^\circ 9'}\, m \Longrightarrow X = \frac{4,175 \cdot 0,6116}{0,9464}\, m$$

یا
$$X = \frac{2,5535}{0,9464}\, m \Longrightarrow X = 2,698 \,\ldots\ldots m$$

پنځم سوال: په یوه دایره کې چې شعاع یې $35,8\,Cm$ ده د څخه وتر چې طول یې $28,7\,Cm$ دی، مقابله مرکزي زاویه او د وتر فاصله تر مرکز پورې محاسبه کړئ.

حل : لومړی د A د نقطې څخه په OB یو عمود او بیا د $\hat{O}$ ناصف الزاویه چې د AB ناصف عمود هم دی، رسموو.



څرنګه چې د AOB مثلث متساوي الساقین دی نو لیکلای شو چې :

$\hat{A} = \hat{B} \ldots$ (د مساوي اضلاعو په مقابل کې زاویې مساوي دي) $\ldots I$

په هره مثلث کې لرو چې : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180 \ldots\ldots II$

د I او II را مېلو د متقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې ،

$2A = 180^\circ - \hat{O} \Longrightarrow A = (90 - \hat{O}/2) \Longrightarrow B = (90 - \hat{O}/2)$

اوس د $\widehat{ODA}$ په قايم الزاويه مثلث کې ليکلای شو چې : $\sin \hat{O} = \frac{AD}{35,8}$

$\Longrightarrow AD = 35,8 \sin \hat{O}\ (cm) \ \ldots\ldots III$

همدارنګه د $\widehat{ADB}$ په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې : $\sin B = \frac{AD}{28,7 Cm}$

$\Longrightarrow AD = 28,7 \sin (90 - \hat{O}/2)\ Cm$

$\Longrightarrow AD = 28,7 \cos \hat{O}/2 \ \ldots\ldots IV$

د III او IV رابطو دمقايسې په نتيجه کې ليکلای شو چې :

$35,8 \sin \hat{O} = 28,7 \cos \hat{O}/2 \Longrightarrow 2 \cdot 35,8 \sin O/2 \cos O/2 = 28,7 \cos O/2$

$\Longrightarrow \sin O/2 = \frac{28,7}{71,6} \Longrightarrow \sin O/2 = 0,40083$

دمثلثاتي نسبتونو دجدول څخه استفاده کوو او $\hat{O}/2$ او بالاخره $\hat{O}$ زاويه په

لاس راوړو، په دې ډول چې ،

1/ زاويې	Sin قيمتونه
$23^\circ\ 40'$	$0,4014$
$-23^\circ\ 30'$	$-0,3987$
$10'$	$0,0027$

2/	
$10'$	$0,0027$
X	$0,0022$

$X = 8'\ 8,4''$

$\Longrightarrow \frac{O}{2} = 23^\circ\ 38'\ 8,4''$

$\Longrightarrow \hat{O} = 47^\circ\ 16'\ 16,8''$

همدارنګه د $\widehat{OCB}$ په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې :

$OC^2 = OB^2 - BC^2$ يا $OC^2 = (35,8\ cm)^2 - (\frac{AB}{2})^2 \ldots$ (OC عمود ناصف دی)

$\Longrightarrow OC^2 = (35,8)^2\ cm^2 - (14,35)^2\ cm^2$

$\Longrightarrow OC^2 = 1075,7175$

$\Longrightarrow OC = 32,79 \ \ldots\ldots\ cm$

د پنځه ویشتم سوال پاتې برخه:

$$= 5 + (1+\cot g^2 a)(1+tg^2 a) = 5+1+tg^2 a+\cot g^2 a+\cot g^2 a \cdot tg^2 a$$

$$= 6 + tg^2 a + \cot g^2 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}\cdot\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = 6+tg^2 a+\cot g^2 a+1$$

$$= 7+tg^2 a+\cot g^2 a$$

د ځینو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې روابط

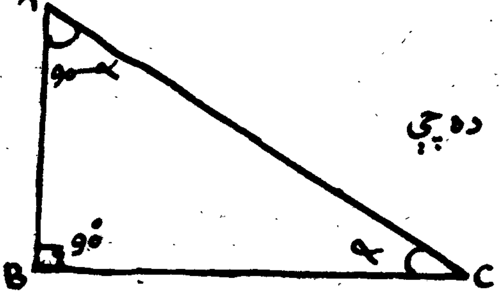
کولای شو چې د منفي زاویې مثلثاتي نسبتونه د یوې مثبتې حادې زاویې له جنسه په لاس راوړو.

که α یوه مثبته حاده زاویه وی او قبول کړو چې:

$\sin\alpha = -\sin\alpha$ یا $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$ نو کولای شو چې د منفي زاویې مثلثاتي د α له جنسه په لاندې ډول هم په لاس راوړو:

۱ـ د دوه مکملو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې روابط:

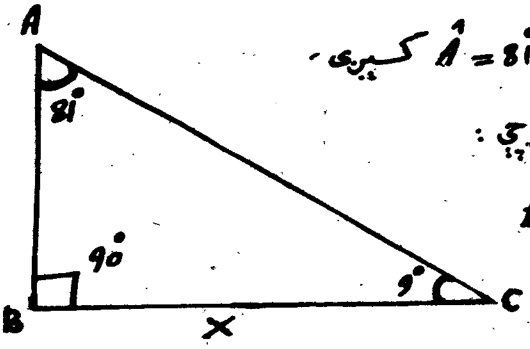
یو قایم الزاویه مثلث په نظر کې نیسو او فرضوو چې نوموړی مثلث مرسوم په یوه مثلثاتي دایره کې دی.



که C زاویه α وی نو معلومه ده چې د $\hat{A} = (90-\alpha)$ ځکه چې $\hat{A}+\hat{C}=90°$ یا $90+\hat{A}+\hat{C}=180$ کیږی،

شپږم سوال: د یوه ترصد برج چې 150m ارتفاع لري، د یوې زره دارې قطعې د سرقطار د منزل زاویه $81°$ ده. د برج او زره دارې قطعې د سرقطار فاصله محاسبه کړئ.

حل: د ABC په قایم الزاویه مثلث کې چې د B زاویه قایمه ده (څنګه چې د برج د بیخ نقطه ده) نو $\hat{A} = 81°$ کیږي.



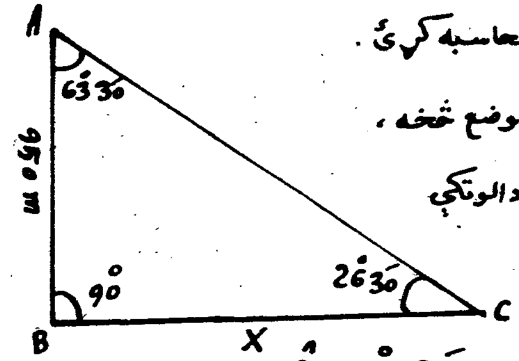
نو د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,81° = \frac{x}{150m} \Longrightarrow x = 150\; tg\,81° (m)$$

$$\Longrightarrow x = 150 \cdot 6,3138\; m$$

$$= 947,070\; m$$

اوم سوال: یوه کشافه الوتکه په 950m ارتفاع د دښمن د موضع د پاسه الوتې ده، له خپلې ارتفاع څخه خپلې مربوطې قطعې ته اطلاع ورکوي. نو په داسې حال کې چې د الوتکې د ارتفاع زاویه له قطعې څخه $26°\,30'$ وي، نو د دښمن د موضع فاصله د الوتکې د مربوطې قطعې څخه محاسبه کړئ.



حل: د B نقطه عبارت ده د دښمن له موضع څخه، C د الوتکې قطعه ده، نو AB = 950 m د الوتکې ارتفاع ده.

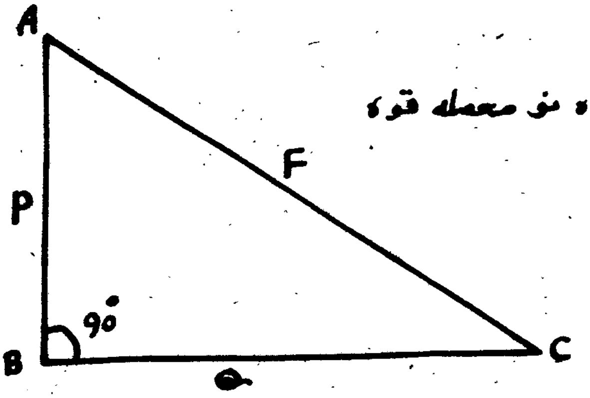
نو پوهېږو چې: $\hat{A} = 90° - 26°\,30' \Longrightarrow \hat{A} = 63°\,30'$

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې: $tg\,63°\,30' = \frac{x}{950m}$

$$\longrightarrow x = 950\; tg\,63°\,30'\; m = \frac{950}{1000}\; tg\,63°\,30'\; km$$

$$= 0,95 \cdot 2,0057 = 1,905415\; Km$$

اتم سوال: دوه قوې $Q=5,6\,kg$ او $P=4,3\,kg$ یو پر بل باندې عمود دي، د دغو دوه قوو محصله محاسبه کړئ او هغه زاویه چې د محصلې قوې او د P د قوې ترمنځ ده، په لاس راوړئ.



حل: څرنګه چې P په Q عمود ده نو محصله قوه (F) عبارت ده له:

$$F=\sqrt{(4,3)^2+(5,6)^2}\ kg$$

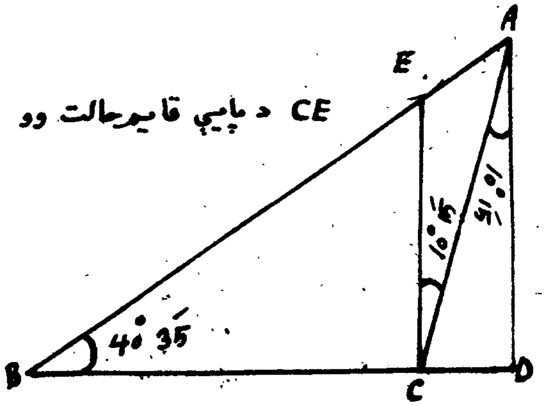
$$F=\sqrt{(49,85)}\ kg$$

$$=7,060\ kg \overset{\text{تقریباً}}{\approx} 7,1\ kg$$

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې: $\sin A=\frac{5,6}{7,1}$

$$\Longrightarrow \sin A = 0,78873 \Longrightarrow \hat{A}=52^\circ\,5'\,33,3''$$

نهم سوال: یوه پایه د خپل قایم حالت څخه $10^\circ\,15'$ د لمر خواته کږه شوېده، په داسې حال کې چې د ارتفاع زاویه $40^\circ\,35'$ وي او د پایې سیوری $40,75\ m$ اوږد دی ولرې نو د پایې اوږدوالی به څومره وي؟



CE د پایې قایم حالت وو

حل: د ADB په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,40^\circ\,35' = \frac{AD}{40,75+CD}$$

$$\Longrightarrow AD = 40,75\ tg\,40^\circ\,35' + CD\ tg\,40^\circ\,35' \quad ...I$$

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,10^\circ\,15' = \frac{CD}{AD}$$

$$\Longrightarrow CD = AD\ tg\,10^\circ\,15' \quad ....II$$

له دوهم نمبر رابطې څخه د CD قیمت په اول نمبر رابطه کې وضع کوو، لیکلای شو چې:

$$AD = 40,75\ tg\ 40°35' + AD\ tg\ 10°15' \cdot tg\ 40°35'$$

$$\Longrightarrow AD(1 - tg\ 10°15' \cdot tg\ 40°35') = 40,75\ tg\ 40°35'$$

$$\Longrightarrow = \frac{40,75\ tg\ 40°35'}{1 - tg\ 10°15' \cdot tg\ 40°35'} = \frac{40,75 \cdot 0,85660}{1 - 0,18083 \cdot 0,85660}\ m = 41,324\ m$$

لسروچي: $CD = AD\ tg\ 10°15' \Longleftarrow CD = 41\ 324 \cdot 0,18083\ m$

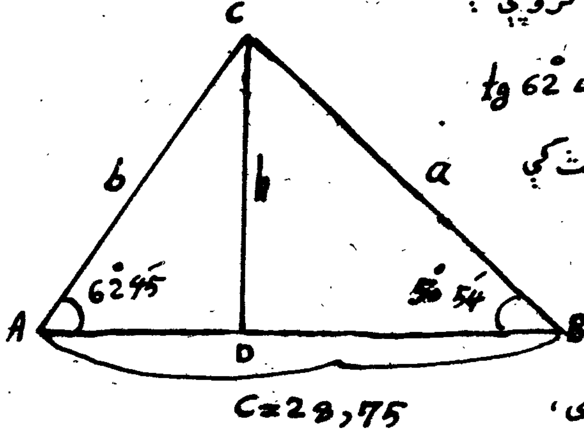
$$= 7,48073\ m = \approx 7,481\ m$$

د ADC په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو چې: $AC = \sqrt{CD^2 + AD^2}$

$$\Longrightarrow AC = \sqrt{(7,481)^2 + (41,324)^2}\ m = \sqrt{1763,60}\ m = 41,9\ m$$

لسم سوال: دوه ليدونکي دځمکې دسطحې د A او B له دوو نقطو څخه چې 2875m يوله بل څخه فاصله لري، ديوې الوتکې دارتفاع زاويې چې د $\overline{AB}$ دمستقيم دپاسه الوزي اندازه کوي. دازاويې د A په نقطه کې د $62°45'$ سره اود B په نقطه کې له $50°54'$ سره مساوي دي. نو د الوتکې د A او B څخه اوارتفاع يې دځمکې له سطحې سره څومره ده؟

حل: د CDA په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو چې:



$$tg\ 62°45' = \frac{h}{AD} \Longrightarrow h = AD\ tg\ 62°45' \quad \dots I$$

په همدې د CDB په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$tg\ 50°54' = \frac{h}{BD} \Longrightarrow h = BD\ tg\ 50°54' \quad \dots II$$

څرنګه چې $AD = 28\ 75 - BD$ دي،

$$\Longrightarrow h = 28\ 75\ tg\ 62°45' - BD\ tg\ 62°45' \quad \dots III$$

د II او III رابطو دمقايسې په نتيجه کې ليکلای شو چې:

$$BD\ tg\ 50°54' = 28\ 75\ tg\ 62°45' - BD\ tg\ 62°45'$$

$\Longrightarrow BD(tg\,50^\circ 54' + tg\,62^\circ 45') - BD\, tg\,62^\circ 45'$

$\Longrightarrow BD = \frac{2875 \cdot 1,9416}{1,9416 + 1,2305}\ m = 1760,2\ m$

لــروچي : $AD = 2875 - BD \Longleftarrow$

$AD = (2875,0 - 1760,2)\ m = 1760,2\ m$

د CDA په قایم الزاویه مثلث کې لروچي : $tg\,62^\circ 45' = \frac{h}{1114,8\ m}$

$\Longrightarrow h = 1114,8 \cdot 1,9416\ m \Longrightarrow h = 2164,49568\ m$

$\approx 2164,5\ m \Longrightarrow h = 2165\ m$

په همدې دول د CDA په قایم الزاویه مثلث کې لروچي :

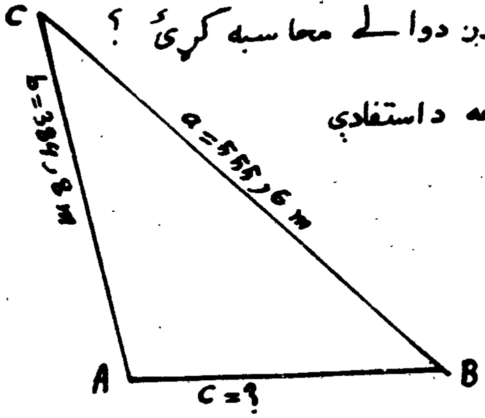
$\sin 62^\circ 45' = \frac{h}{b} \Longrightarrow b = \frac{2165}{\sin 62^\circ 45'} \Longrightarrow b = \frac{2165}{0,88902}\ m$

$\Longrightarrow b = 2435,27\ m$

د CDB په قایم الزاویه مثلث کې لروچي : $\sin 50^\circ 54' = \frac{h}{a} \Longrightarrow a = \frac{h}{\sin 50^\circ 54'}\ m$

$= \frac{2165}{0,77605}\ m = \frac{433}{0,15521}\ m \Longrightarrow a = 2789,7\ m$

یوولسم سوال : دیوه غرڅ د A او B دوه نقطو ترمنځ تونل کیندل کیږی د C نقطه چې د A او B له دوو نقطو څخه لیدل کیږی د A له نقطې څخه په 384,8 m او د B له نقطې څخه په 555,6 m واقع ده . په داسې حال کې چې د $(A\hat{C}B = 35^\circ 42')$ ده نو د تونل اوږدوالی محاسبه کړئ ؟



حل : د ACB په مثلث کې د tg دقضیې څخه داستفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$tg\,\frac{A-B}{2} = \frac{555,6 - 384,8}{555,6 + 384,8}\ cotg\,17^\circ 51'$

$= \frac{107,8}{940,4} \cdot 3,1053$

$= 0,1816 \cdot 3,1053 = 0,56393$

داچې په لاس راغلی tg دمثلثاتي نسبتونو په جدول کې نشته نو د $\frac{A-B}{2}$ زاویې د موندلو لپاره دانترپولیشن څخه کار اخلو :

1/ زاویې	tg تونه یې
$29^\circ 26'$	$0,56424$
$-29^\circ 25'$	$-0,56385$
$60''$	$0,00039$

2/ $0,56393$ ← په لاس راغلی tg

$0,56385$ ← دکوچنۍ زاویې tg

$0,00008$

3/ دزاویو فرق	د tg تونو فرق
$60''$	$0,00039$
X	$0,00008$

$\Longrightarrow X = (12,3'')$

اوس په لاس راغلی فرق دکوچنۍ زاویې سره جمع کوو ، مطلوب مو په لاس راځي یعني:

$\frac{A-B}{2} = 29^\circ 25' 12,3'' \Longrightarrow A-B = 58^\circ 50' 24,6'' \quad . . . . -I$

له بله پلوه $A + B = 180^\circ - C$

$\Longrightarrow A+B = 179^\circ 60' - 35^\circ 42' = 144^\circ 18' \quad . . . -II$

I او II معادلې حل کوو :

$A+B = 144^\circ 18'$

$A-B = 58^\circ 50' 24,6'' \Longrightarrow 2B = 85^\circ 27' 35,4'' \Longrightarrow B = 42^\circ 44' 5,4''$

د Sin دقضیې څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې ؛

$$\frac{\sin 35^\circ 42'}{c} = \frac{\sin 42\ 44\ 5,4}{384,8\ m}$$

$$\Longrightarrow c = \frac{384,8 \sin 35^\circ 42'}{\sin 42^\circ 44' 5,4''}\ m$$

$\sin 42^\circ 44' 5,4''$ په جدول کې نشته دانترپولیشن په واسطه یې پیداکوو:

۱/ زاويې	ساينونه يې	۲/ د زاويو فرق	د ساينونو فرق يې
$42^\circ 45'$	$0,67880$	$60''$	$0,00021$
$-42^\circ 44'$	$-0,67859$	$5,4''$	X
$60'$	$0,00021$	$X=\frac{5,4\cdot 0,00021}{60}=0,0000189$	

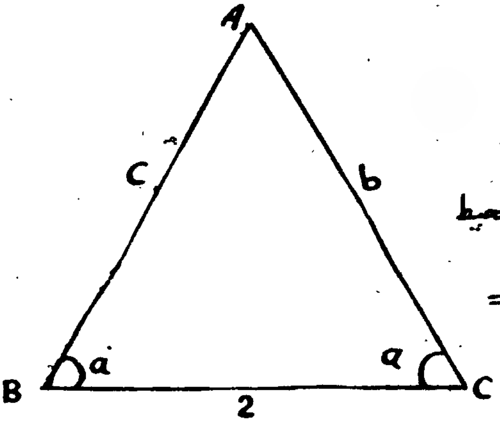
۳/ په لاس راغلی فرق د کوچنۍ زاويې د Sin سره جمع کوو، مطلوب په لاس راځي:

$$\begin{array}{r} 0,67859 \\ 0,0000189 \\ \hline 0,6786089 \end{array} \Longrightarrow \sin 42^\circ 44' 5,4'' = 0,6786089$$

$$\Longrightarrow C=\frac{384,8\cdot 0,58354}{0,67860}=\frac{224,55}{0,6786}\Longrightarrow C=330,901\,m$$

دولسم سوال: د يوه متساوي الساقين مثلث قاعده 2 او د قاعدې زاويه يې a ده، د نوموړي مثلث محيط معلوم کړئ.

حل: د Sin د قضيې څخه د استفادې په صورت کې ليکلای شو چې:



$$\frac{\sin a}{2}=\frac{\sin a}{b}\Longrightarrow b=\frac{2\sin a}{\sin A}$$

له بله پلوه: $\frac{\sin a}{c}=\frac{\sin A}{2}\Longrightarrow c=\frac{2\sin a}{\sin A}$

د مثلث محيط $=a+b+c=2+2\ \frac{2\sin a}{\sin A}$

$$=\frac{2\alpha\sin a+\alpha\sin A}{\sin A}$$

$$=\frac{\alpha(2\sin a+\sin A)}{\sin A}$$

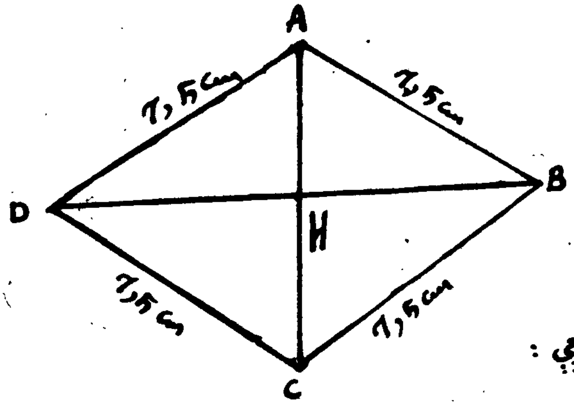
څرنګه چې: $2\hat{a}+\hat{A}=180 \Longrightarrow \hat{A}=180^\circ-2a$

$$\Longrightarrow \sin A=\sin(180^\circ-2a)=\sin 2a$$

$$\Longrightarrow \text{د مثلث محيط}=\frac{\alpha(2\sin a+\sin 2a)}{\sin 2a}=\frac{2\sin a(1+\cos a)2}{2\sin a\cos a}=\frac{2\cdot 2\cos^2 a/2}{\cos^2 a/2-\sin^2 a/2}$$

دمثلث محیط $= 2\vartheta \frac{1}{1-tg^2 a/2}$

دیارلسم سوال : دداسې معین مساحت و مومئ چې ضلع $a = 7,5\ Cm$ او حاده زاویه یې $22^\circ\ 12'$ وي .



حل : معلومه ده چې $\hat{B} = \hat{D} = 22^\circ\ 12'$

له بله پلوه : $\hat{A} + \hat{C} = 359^\circ\ 60' - (\hat{B} + \hat{D})$

$A + C = 359^\circ\ 60' - 44^\circ\ 24' = 315^\circ\ 36'$

څرنګه چې : $\hat{A} = \hat{C}$ پس لیکلای شو چې :

$2A = 315^\circ\ 36' \Longrightarrow \hat{A} = 157^\circ\ 48'$

د ABH په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$\sin B/2 = \frac{AH}{7,5\ Cm}$

$\Longrightarrow AH = 7,5\ Cm\ \sin 11^\circ\ 6' \Longrightarrow 2AH = AC = 15\ Cm\ \sin 11^\circ\ 6'$

په همدې ABH قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$\sin A/2 = \frac{BH}{7,5\ Cm} \Longrightarrow BH = 7,5\ \sin 78^\circ\ 54'$

په نتیجه کې د ABC دمثلث مساحت :

$S(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{15 \cdot 7,5 \sin 11^\circ 6' \cdot \sin 78^\circ\ 54'}{2}\ cm^2$

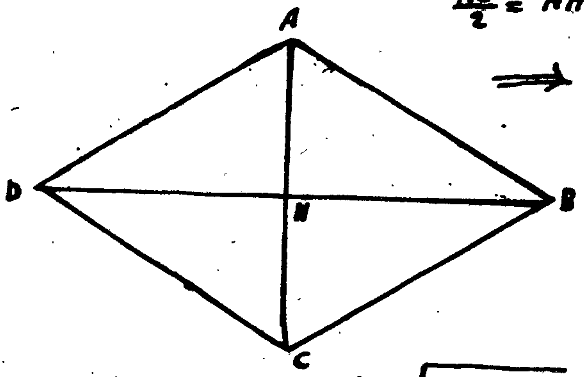
څرنګه چې د $S(ABC) = S(ADC)$ او

$S(\overset{\diamond}{ABCD}) = S(ADC) + S(\overset{\triangle}{ABC}) \Longrightarrow S(\overset{\diamond}{ABCD}) \frac{112,5 \sin 11^\circ 6' \sin 78^\circ 54'}{2}$

$= \frac{112,5 \cdot 0,20107 \cdot 0,98006}{2} = 22,331\ Cm^2 \Longrightarrow S\ \overset{\diamond}{ABCD} = 22,331\ Cm^2$

څوارلسم سوال : دیوه معین قطرونه $d_1 = 28\ Cm$ او $d_2 = 49\ Cm$ دي، دنوموړی معین زاویې حساب کړئ .

حل : څرنګه چې : $BD = 2BH \Longrightarrow BH = \frac{BD}{2} = \frac{49}{2} \Longrightarrow BH = DH = 24,5\ Cm.$



په همدې ډول : $\frac{AC}{2} = AH = CH$

$\Longrightarrow AH = CH = 14\ Cm$

اوس نو د AHB په قایم الزاویه

مثلث کې لرو چې :

$AB = \sqrt{(14)^2 + (24,5)^2}$

$= \sqrt{796,25} \Longrightarrow AB = 28,21\ Cm$

په همدې مثلث کې لرو چې :

$\sin A/_2 = \frac{24,5}{28,21} = 0,86494$

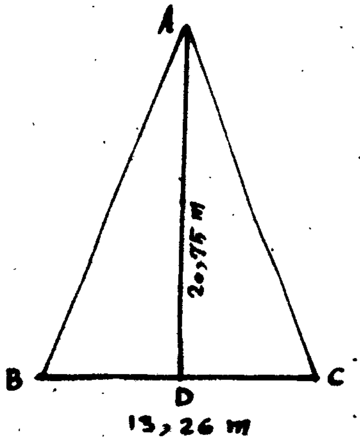
$A/_2 = 59^\circ\ 51'$ یا $A = 119^\circ\ 42'$

بالاخره $= A = C = 119^\circ\ 42'$

څرنګه د څلور ضلعي د زاویو مجموعه 360° ده ، نو لیکلای شو چې : $B+D = 360 - (A+C)$

څرنګه چې $\hat{B} = \hat{D} = 60^\circ\ 18'$ $\Longleftarrow 2B = 360 - (A+C)$ یا $\hat{B} = 180 - \frac{A+C}{2}$

پنځلسم سوال : په یوه متساوی الساقین مثلث کې قاعدهٔ 13,26 m او ارتفاع یې 20,75 m ده ، زاویې یې محاسبه کړئ .



حل ، د ADB په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$tg\,B = \frac{AD}{BD}$

پوهېږو چې $BD = \frac{BC}{2}$ ، ځکه چې AD ناصف عمود دی (متساوی الساقین دی) .

$\Longrightarrow tg\,B = \frac{20,75}{6,63} = 3,1298$

په لاس راغلی tg په جدول کې نشته ، د انترپولېشن څخه یې په پیدا کولو کې استفاده کوو :

2/ $3,1298$ ← tg په لاس راغلی
$-3,1271$ ← tg دکوچنۍ زاوېې

$0,0027$

زاویې	tg تونه یې
$-72^\circ 16'$	$-3,1271$
$72^\circ 17'$	$3,1303$
$60''$	$0,0032$

3/

دزاویو فرق	د tg تونو فرق
$60''$	32
X	27

$\Longrightarrow x = 50,6''$

$$\Longrightarrow \hat{B} = \hat{C} = 72^\circ 16' 50,6'' \Longrightarrow \hat{A} = 180^\circ - (B+C)$$

$$\hat{A} = 179^\circ 59' 60'' - 144^\circ 33' 41,2'' = 35^\circ 26' 18,8''$$

شپاړسم سوال : دیوه متساوی الساقین مثلث زاویې په داسې حال کې ومومۍ چې قاعده یې $8,13m$ او یو ساق یې $17,53m$ وی ؟

حل : واضح ده چې دمثلث دمحیط نیمایی یعنې : $P = 21,595 \ cm$

اوس د A زاویه د لاندې فرمول څخه د استفادې په صورت کې په لاس راوړو،

$$\sin A/2 = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \Longrightarrow \sin A/2 = \sqrt{\frac{(21,595-17,53)^2}{(17,53)^2}}$$

$$= \frac{4,065}{17,53} = 0,2318 \approx 0,2319$$

$$\Longrightarrow \sin A/2 = 0,2319$$

اوس دمثلثاتی نسبتونو دجدول څخه استفاده کړو او د $A/2$ زاویه پیدا کوو،

زاویې	ساینونه یې
$13^\circ 30'$	$0,2334$
$13^\circ 20'$	$0,2306$
$10'$	$0,0028$

2/ $0,2319$
$0,2306$

$0,0013$

3/

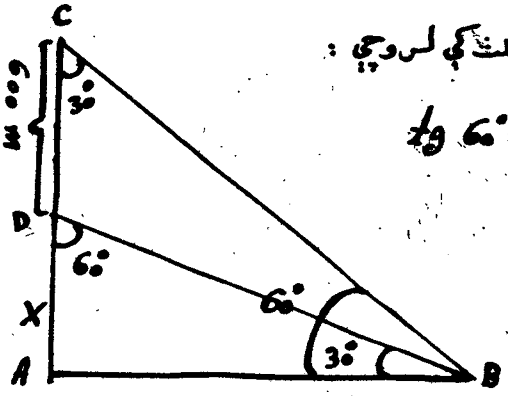
$10'$	28
X	13

$\Longrightarrow X = (4,7')$

اوس په لاس راغلی فرق دکوچنۍ زاویې سره جمع کړو، مطلوب په لاس راځي :

$\Longrightarrow A/2 = 13^\circ\, 24'\, 42''$ يا $\Longrightarrow \hat{A} = 26^\circ\, 49'\, 24''$

اووه لسم سوال : یو بالون دبحر د A له نقطې څخه پورته شو او دیوې کشتۍ دستنزیل زاویه يې 30° ومونده. کله چې $600\,m$ عموداً ښکته راغی نو دستنزیل زاویه يې 60° ومونده. دکشتۍ او د A دنقطې په منځ کې فاصله معلومه کړئ.



حل : لومړی د CAB په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$tg\,60^\circ = \frac{600+X}{AB} \quad \text{يا} \quad \sqrt{3} = \frac{600+X}{AB}$$

$$\Longrightarrow X = \sqrt{3}\,AB - 600 \quad \dots\dots I$$

دویم د DAB په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$tg\,30^\circ = \frac{X}{AB}$$

$$\Longrightarrow X = \frac{AB}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots II$$

د I او II رابطو په دمقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې:

$$\frac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,AB - 600 \Longrightarrow AB = 3AB - \sqrt{3}\cdot 600\ m$$

$$\Longrightarrow 2AB = \sqrt{3}\cdot 600\ m \qquad \Longrightarrow AB = 1{,}732\cdot 300$$

$$\Longrightarrow AB = 173{,}2\cdot 3\ m \qquad \Longrightarrow AB = 519{,}6\ m$$

نو دکشتۍ چې موقعیت د B په نقطه کې دی او د A دنقطې په منځ کې فاصله عبارت ده له : $AB = 519{,}6\ m$

اتلسم سوال : P او Q دیوه برج چې په افقي سطحه واقع دی دبیخ او څوکې نقطې دي. A او B د افقي سطحې دوه نقطې دي، داسې چې $AB = 32\ m$، $Cotg\,PAQ = \frac{2}{3}$، $Cotg\,PBQ = \frac{3}{5}$ او $Q\hat{A}B = 90^\circ$ دی. دبرج ارتفاع څومره ده؟

ځکه چې $\hat{A}+\hat{C}=90^\circ$ یا $90^\circ+\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$ ، اوس د α او $\alpha-90$ زاویو دمثلثاتي نسبتونو ترمنځ روابط مطالعه کوو.

پوهېږو چې: $\sin\alpha = AB$ یا $\sin\alpha=\frac{AB}{AC}$ . . . (ځکه چې AC دمثلثاتي دایرې شعاع). همدارنګه $\cos(90-\alpha)=AB$ یا $\cos(90-\alpha)=\frac{AB}{AC}$ . . (ځکه چې AC دمثلثاتي دایرې شعاع).

دپورتنیو وابطو دمقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې:

$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha \ldots II$. دوهمه رابطه په لومړۍ رابطې طرف په طرف تقسیموو لیکو چې:

$$\frac{\sin(90-\alpha)}{\cos(90-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha)} \Longrightarrow tg(90-\alpha)=cotg\alpha$$

همدارنګه لومړۍ رابطه په دویمه رابطه طرف په طرف تقسیموو لیکو چې،

$$\frac{1}{\cos(90-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sec(90-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha$$

او هم ددویمې رابطې معکوسه رابطه لیکلای شو، په نتیجه کې راځي چې:

$$\frac{1}{\sin(90-\alpha)}=\frac{1}{\cos\alpha} \Longrightarrow \operatorname{cosec}(90-\alpha)=\sec\alpha$$

۳ـ دهغو دوه زاویو مثلثاتي نسبتونو په منځ کې روابط چې فرق يې 90° درجې دی:

که $(\alpha+90)$ زاویه β فرض کړو، نو معلومه ده چې:

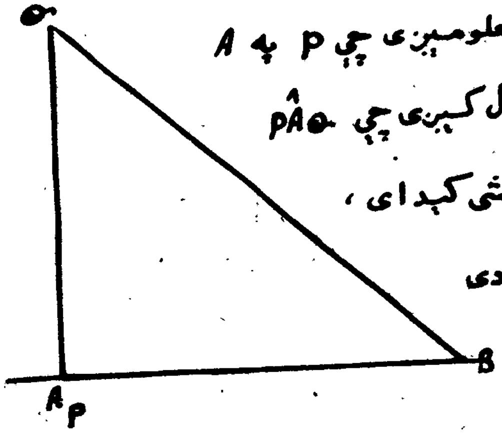
$$\sin(90+\alpha)=\sin\beta=\cos(90-\beta)$$

اوس په آخرنۍ رابطه کې د β په عوض د هغې مساوي قيمت وضع کوو لیکو:

$$〃=\cos[90-(90+\alpha)]=\cos[90-90-\alpha]$$

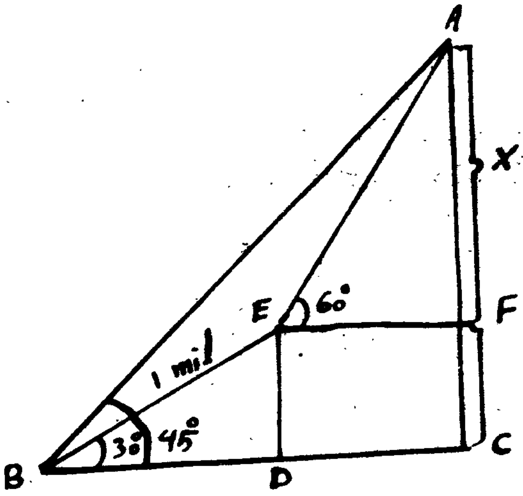
$$=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \Longrightarrow \sin(90+\alpha)=\cos\alpha \ldots I$$

حل : دسوال دشرایطوسره برابر برج په افقي سطحه رسمو،



دراکړل شوی سوال دلومړی شرط څخه معلومیږی چي P په A منطبق ده . که شکل ته وګورو نولیدل کیږی چي $P\hat{A}O$ صفر ده او دصفر زاویې $\frac{2}{3}$ Ctg نشي کېدای، نو دنوموړی سوال شرایط صحیح نه دی وضع شوی، پس ویلای شو چي په دې شرایطو سره سوال حل نشلری .

شولسم سوال : دیوې څوکې دارتفاع زاویه دځمکې څخه 45° ده، که یولېدونکی د 30° په میل یومیل (1 mil) پورته لاړشي د ارتفاع زاویه 60° ګرځي، د هموارې سطحې دڅوکې ارتفاع لاس ته راوړئ .



حل : د BDE په قایم الزاویه مثلث کې لروچي :

$$\sin 30^\circ = \frac{DE}{1\,mil} \Longrightarrow DE = \frac{1}{2}\ mil$$

په همدې مثلث کې دفیثاغورث دقضیې په اساس لیکلای شو چي

$$BD^2 = 1\,mil^2 - \frac{1}{4}\ mil^2$$

$$\Longrightarrow BD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ mil$$

د AFE په قایم الزاویه مثلث کې لروچي :

$$tg\,60^\circ = \frac{X - FC}{DC}$$

یا $\sqrt{3} = \frac{X - \frac{1}{2}\,mil}{DC} \Longrightarrow \sqrt{3}\,DC = X - \frac{1}{2}\,mil$

$$\Longrightarrow X = \sqrt{3}\ DC + \frac{1}{2}\ mil \quad \cdots\cdots - I$$

له بله طرفه د ACB په قائم الزاویه مثلث کې لرو چې : $X = BC \Leftarrow tg\,45° = \frac{X}{BC} \ldots\ldots I$

څرنګه چې $X = BD + DC \Longrightarrow = \frac{\sqrt{3}}{2}\,mil + DC$

په I رابطه کې د X قیمت وضع کوو، لیکو چې : $\frac{\sqrt{3}}{2}\,mil + DC = \sqrt{3}\,DC + \frac{1}{2}\,mil$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,mil = (\sqrt{3}-1)\,DC \Longrightarrow DC = \frac{1}{2}\,mil$$

لسروچې $X = BD + DC$ ، په همدې رابطه کې د BD او DC قیمتونه وضع کوو، لیکو :

$$X = \frac{\sqrt{3}}{2}\,mil + \frac{1}{2}\,mil = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\,mil = \frac{2,732}{2}\,mil = \boxed{1,366\,mil}$$

دځوممو قضیو ثبوت . . .

لومړۍ قضیه :

که د $y = f(x)$ تابع لیمټ ولری نو : $\lim \log_c f(x) = \log_c \lim f(x)^{\,c \in R}$.

ثبوت : څرنګه چې د $f(x)$ تابع $\lim$ لری، فرض کوو چې دهغې یو $K \in R$ دی، یعنې : $\lim \log_c f(x) = K \ldots\ldots I$

پوهیږو چې $k = \lim k$ نو پورتنۍ رابطه داډول هم لیکلای شو :

$$\lim \log_c f(x) = \lim k \Longrightarrow \log_c f(x) = k \ldots II$$

دلوګاریتم د تعریف څخه د استفادې په صورت کې له II لمبر رابطې څخه لیکلای شو چې:

$$f(x) = c^{k} \ldots\ldots III$$

اوس د دریم III لمبر رابطې د اطراف $\lim$ نیسو، لیکو چې : $\lim f(x) = \lim c^{k}$

څرنګه چې c ثابت او k ثابت، نو c^{k} هم ثابت دی، نو : $\lim c^{k} = c^{k}$

دی نو لیکلای شو چې : $\lim f(x) = c^{k} \ldots\ldots IV$

اوس د IV رابطې د c په قاعده د اطراف لوگاریتم په لاس راوړو لیکو چې :

$$\log_c \lim f(x) = \log_c c^k \Longrightarrow \log_c \lim f(x) = k \; \text{- - - -} \; V$$

د I او V لمبر اړیکو دپرتلې په نتیجه کې لیکلای شو چې :

$$\lim \log_c f(x) = \log_c \lim f(x)$$ ← قضیه ثبوت شوه

دویمه قضیه :

$$c \in R \,,\; \lim c^{u(x)} = c^{\lim u(x)}$$ ثبوتوو چې

ثبوت : ددې قضیې دثبوت لپاره په لومړي سر کې یوه وضع اجراء کوو لیکو چې:

$$c^{u(x)} = z \Longrightarrow \log_c c^{u(x)} = \log_c z$$

$$\Longrightarrow u(x) = \log_c z \; \text{- - - - - - - -} \; I$$

اوس د I لمبر رابطې د اطراف څخه $\lim$ نیسو ، لیکو چې :

$$\lim u(x) \quad \lim \log_c z$$

څرنګه چې $\log_c z = \log_c \lim z$ نو د پورتنۍ رابطې څخه لیکلای شو چې :

$$\lim u(x) = \log_c \lim z$$

په لاس راغلې رابطه داسې هم لیکلای شو چې : $c^{\lim u(x)} = c^{\log_c \lim z}$

$$\Longrightarrow c^{\lim u(x)} = \lim z \cdot \log_c c = \lim z \cdot 1$$

$$\Longrightarrow c^{\lim u(x)} = \lim z \; \text{- - - - - - -} \; II$$

په II رابطه کې د z مساوي یعنې $c^{u(x)}$ وضع کوو، لیکلای شو چې :

$$\lim c^{u(x)} = c^{\lim u(x)}$$

دریمه قضیه :

ثبوتوو چې : $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \,,\; c \in R$

ثبوت : دنوموړې دقضيې دثبوت لپاره يوه وضع اجراکوو ، ليکو چې :

$$x^n = e^y \quad \ldots\ldots \quad I$$

داولـې رابطې د e په قاعده داطراف لوګاريتم نيسو ، يعنې :

$$n\ln x = y\ln e = y \Longrightarrow \ln x = \frac{y}{n} \Longrightarrow x = e^{\frac{y}{n}}$$

$$\Longrightarrow dx = e^{\frac{y}{n}} \cdot \frac{1}{n}\, dy$$

نو ليکلای شو چې :

$$\int x^n dx = \int e^y \cdot \frac{1}{n}\, e^{\frac{y}{n}}\, dy$$

$$= \frac{1}{n}\int e^{y\left(\frac{n+1}{n}\right)} dy \quad \ldots\ldots \quad II$$

په II لمبر رابطه کې $e^{y\left(\frac{n+1}{n}\right)} = t$ وضع کوو . دهدې آخرنۍ رابطې د e په قاعده داطراف لوګاريتم په لاس راوړو ، فی النتيجه ليکلای شو چې :

$$\frac{n+1}{n}\, y = \ln t \Longrightarrow \frac{n+1}{n}\, dy = \frac{dt}{t}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n}\int e^{y\left(\frac{n+1}{n}\right)} dy = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\int t \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\int dt\right] = \frac{1}{n+1}\, t + c$$

په آخرنۍ رابطه کې د t مساوی $e^{y\left(\frac{n+1}{n}\right)}$ وضع کوو ، ليکو چې :

$$\frac{1}{n+1}\, t + c = \frac{1}{n+1}\, e^y \cdot e^{\frac{y}{n}} + c$$

$$= \frac{1}{n+1}\, e^y \cdot (e^y)^{\frac{1}{n}} + c$$

په لاس راغلې رابطه کې د e^y مساوی يعنې x^n وضع کوو ، يعنې :

$$\frac{1}{n+1}\, t + c = \frac{1}{n+1} \cdot x^n \cdot (x^n)^{\frac{1}{n}} + c$$

$$= \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + c$$

$\cos(90+\alpha) = ?$

په همدې ډول که $\beta = \alpha + 90$ فرض کړو نو :

$\cos(90+\alpha) = \cos\beta \qquad = \sin(90-\beta)$

په آخرنۍ رابطه کې د β مساوي قیمت وضع کوو نولیکو چې :

$= \sin[90-(90+\alpha)] \quad = \sin[90-90-\alpha] \quad = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\Longrightarrow \cos(90+\alpha) = -\sin\alpha \quad \ldots\ldots II$.

اوس لومړۍ رابطه په دویمه رابطه طرف په طرف تقسیموو اولیکو :

$$\frac{\sin(90+\alpha)}{\cos(90+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot g\alpha$$

$\Longrightarrow tg(90+\alpha) = -tg\,\alpha$

$\cot g(90+\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره دویمه رابطه په اوله رابطه طرف په طرف تقسیموو :

$$\frac{\cos(90+\alpha)}{\sin(90+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$

$\Longrightarrow \cot g(90+\alpha) = -tg(\alpha) \quad \ldots\ldots \; IV$

په همدې ډول کولای شو چې ددوهمې رابطې معکوسه رابطه ولیکو

یعنې : $\frac{1}{\cos(90+\alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} \Longrightarrow \sec(90+\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

۳ـ ددوو متممو زاویو دمثلثاتي نسبتونو په منځ کې روابط :

$1/\ \sin(180-\alpha) = ?$

څرنګه چې $180° = 90° + 90°$ کېږي نو لیکو چې :

$\sin(180-\alpha) = \sin[90+(90-\alpha)]$

که پورتنۍ رابطه کې $\hat{x} = 90 - \alpha$ فرض کړو نو : (بل مخ)

$= \sin(90+x) = \cos x = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\Longrightarrow \sin(180-\alpha) = \sin\alpha \; .... \; I$

2/ $\cos(180-\alpha) = ?$

د °180 پرځای 90+90 وضع کوو، نو لیکو چې:

$\cos(180-\alpha) = \cos[90+(90-\alpha)]$

$= -\sin(90-\alpha) = -[(\cos\alpha)] = -\cos\alpha$

$\Longrightarrow \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha \; .... \; II$

3/ $tg(180-\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره لومړۍ رابطه په دویمه رابطه طرف په طرف تقسیمو لیکو چې:

$\frac{\sin(180-\alpha)}{\cos(180-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha \Longrightarrow tg(180-\alpha) = -tg\alpha$

4/ $ctg(180-\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره دویمه رابطه په لومړۍ رابطه طرف په طرف تقسیمو:

$$\frac{\cos(180-\alpha)}{\sin(180-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -ctg\alpha \Longrightarrow ctg(180-\alpha) = -ctg\alpha$$

5/ $\sec(180-\alpha) = ?$

څرنګه چې $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ نو کولای شو چې ددویمې رابطې معکوسه رابطه ولیکو، یعنې:

$\frac{1}{\sin(180-\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \csc(180-\alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha$

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

لومړی فصل

دیوولسم ټولګی د مثلثاتو د لومړی تمرین حل

لومړی سوال: دالاندې زاوېې په رادیان واړوئ ؟

(۱) $X = 25^\circ$

حل: پوهیږو چې: $180^\circ = \pi^c$ نو $X = 25^\circ$ یو تناسب جوړوو لیکو چې:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi^c \\ 25^\circ &= X \end{aligned} \Rightarrow X = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \pi}{\underset{36}{\cancel{180}}} \Rightarrow X = \frac{5\pi^c}{36}$$

(2) $? = 160^\circ$ بیا هم یو تناسب جوړوو، یعني:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi^c \\ 160^\circ &= X \end{aligned} \Rightarrow X = \frac{\overset{8}{\cancel{160}}\pi}{\underset{9}{\cancel{180}}} \Rightarrow X = \frac{8\pi^c}{9}$$

۴ - د α او $(180+\alpha)$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ روابط:

1/ $\sin(180+\alpha) = ?$

څرنګه چي $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ منو لیکو چي:

$$\sin(180+\alpha) = \sin[90+(90+\alpha)] = \sin(90+y) = \cos y$$

$$= \cos(90+\alpha) = -\sin\alpha \Longrightarrow \sin(180+\alpha) = -\sin\alpha \quad \ldots\ldots \; I$$

2/ $\cos(180+\alpha) = ?$

مېه پوره‌تنی شکل سره $180^\circ = 90^\circ + 90^\circ$ نو لیکو چي

$$\cos(180+\alpha) = \cos[90+(90+\alpha)]$$

که $y = \alpha + 90$ وضع کړو، نو لیکلای شو چي:

$$\cos(180+\alpha) = \cos(90+y) = -\sin y$$

$$= -\sin(90+\alpha) = -[\cos\alpha]$$ اوس د y مساوي قیمت وضع کړو،

$$= -\cos\alpha \Longrightarrow \cos(180-\alpha) = -\cos\alpha \quad \ldots\ldots \; II$$

3/ $tg(180+\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره لومړۍ رابطه په دویمه رابطه طرف په طرف وېشو:

$$\frac{\sin(180+\alpha)}{\cos(18+\alpha)} \; \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = +tg\alpha \Rightarrow tg(180+\alpha) = tg\alpha$$

4/ $\cot g(180+\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره دویمه رابطه په لومړۍ رابطه طرف په طرف تقسیموو، یعنې:

$$\frac{\cos(180+\alpha)}{\sin(180+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = +\cot g\alpha \Longrightarrow \cot g(180+\alpha) = \cot g\alpha$$

5/ $\sec(180+\alpha) = ?$

ددویمې رابطې معکوسه رابطه لیکلای شو، څکه چي $0 < \alpha < \pi/2$ ، نو :

$$\frac{1}{\cos(180+\alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha \Longrightarrow \sec(180+\alpha) = -\sec\alpha$$

په پورتني دليل سره د لومړي رابطې معكوسه رابطه هم ليكلای شو، يعني:

$$\frac{1}{\sin(180+\alpha)} = -\frac{1}{\sin\alpha} = -\operatorname{Cosec}\alpha \Longrightarrow \operatorname{Cosec}(180+\alpha) = -\operatorname{Cosec}\alpha$$

ﻫ – د α او $(360-\alpha)$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ روابط:

1/ $\sin(360-\alpha) = ?$

څرنګه چې $360 = 180+180$ کېږي، نو ليکلای شو چې: $\sin(360-\alpha) = \sin[180+(180-\alpha)]$

که په پورته رابطه کې $X = 180-\alpha$ فرض کړو، نو: $= \sin(180+X) = -\sin X$

او بيا د X پر ځای $180-\alpha$ وضع کړو، په لاس راځي چې:

$$= -[\sin(180-\alpha)] = -[\sin\alpha] = -\sin\alpha \Longrightarrow \sin(360-\alpha) = -\sin\alpha \cdots I$$

2/ $\cos(360-\alpha) = ?$

په پورتني دليل سره $360 = 180+180$ ليکو، نو په لاس راځي چې:

$$\cos(360-\alpha) = \cos[180+(180-\alpha)]$$

که $y = 180-\alpha$ وضع کړو، ليکلای شو چې: $= \cos[180+y] = -\cos y$

که په آخرنۍ رابطه کې د $y = 180-\alpha$ وضع کړو، ليکلای شو چې:

$$= -\cos(180-\alpha) = -[-\cos\alpha] = +\cos\alpha \Longrightarrow \cos(360-\alpha) = \cos\alpha \cdots II$$

3/ $tg(360-\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره اوله رابطه په دويمه رابطه طرف په طرف تقسيموو، يعني:

$$\frac{\sin(360-\alpha)}{\cos(360-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha \Longrightarrow tg(360-\alpha) = -tg\alpha$$

4/ $cotg(360-\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره دويمه رابطه په اوله رابطه طرف په طرف تقسيموو، يعني:

$$\frac{\cos(360-\alpha)}{\sin(360-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha \Longrightarrow \cot(360-\alpha) = -\cot\alpha$$

5/ $\sec(360-\alpha) = ?$

کولای شو چې د [illegible] رابطې معکوسه رابطه ولیکو، یعني:

$$\frac{1}{\cos(360-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \Longrightarrow \sec(360-\alpha) = \sec\alpha$$

6/ $\operatorname{cosec}(360-\alpha) = ?$

دلومړۍ رابطې.

د لومړۍ رابطې معکوسه رابطه لیکلای شو، یعني:

$$\frac{1}{\sin(360-\alpha)} = -\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= -\operatorname{cosec}\alpha \Longrightarrow \operatorname{cosec}(360-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$

۴- د α او $(360+\alpha)$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ روابط:

1/ $\sin(360+\alpha) = ?$

څرنګه چې $180+180 = 360$ کیږي، نو لیکلای شو چې،

$$\sin(360+\alpha) = \sin[180+(180+\alpha)]$$

که $180+\alpha = x$ عوض کړو، نو په لاس راځي:

$$= \sin[180+x] = -\sin x$$

اوس د x په ځای $\alpha+180$ وضع کړو او لیکو چې:

$$= -[\sin(180+\alpha)] = -[-\sin\alpha]$$

$$= +\sin\alpha \Longrightarrow \sin(360+\alpha) = \sin\alpha \;\ldots\ldots\; I$$

2/ $\cos(360+\alpha) = ?$

د $(360+\alpha)$ په ځای $(180+\alpha)+180$ لیکو، یعني:

$$\cos(360+\alpha) = \cos[180+(180+\alpha)]$$

اوس $x = \alpha+180$ فرضوو لیکو چې:

$$= \cos(180+x) = -\cos x$$

اوس د x په ځای د هغه مساوي یعني $\alpha+180$ لیکو:

$$= -\cos(180+\alpha)$$

$$= -[-\cos\alpha] = +\cos\alpha \Longrightarrow \cos(360+\alpha) = \cos\alpha \;\ldots\ldots\; II$$

3/ $tg(360+\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره لومړۍ رابطه په دویمه رابطه طرفان په طرف تقسیموو ، یعنې :

$$\frac{\sin(360+\alpha)}{\cos(360+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha \Longrightarrow tg\,\alpha(360+\alpha) = tg\,\alpha$$

4/ $Cotg(360+\alpha) = ?$

ددې مطلب لپاره دویمه رابطه په اوله رابطه طرف په طرف وېشو، لیکو چې :

$$\frac{\cos(360+\alpha)}{\sin(360+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cot\,\alpha \Longrightarrow Cotg(360+\alpha) = Cotg\,\alpha$$

5/ $Sec(360+\alpha) = ?$

سکولای شو چې د دویمې رابطې معکوسه رابطه ولیکو، یعنې :

$$\frac{1}{\cos(360+\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = Sec\,\alpha \Longrightarrow Sec(360+\alpha) = Sec\,\alpha$$

6/ $Cosec(360+\alpha) = ?$

په همدې ډول د لومړۍ رابطې معکوسه رابطه لیکو ، یعنې :

$$\frac{1}{\sin(360+\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$= Cosec\,\alpha$$

$$\Longrightarrow Cosec(360+\alpha) = Cosec\,\alpha$$

PROPERTY OF ACKU

دیوولسم ټولګی د مثلثاتو مربوط مسائل

دریم تمرین

لومړی سوال : په لاندې معادله کې مجهول قوس په لاس راوړئ ؟

$$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0$$

حل : څرنګه چې $-3 = 1 - 4$ ، نو په راکړل شوې معادله کې د -3 قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 - 4 = 0 \qquad (\sin x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$(\sin x + 1)^2 - (2)^2 = 0 \qquad [(\sin x + 1) - 2][\sin x + 1 + 2] = 0$$

$$\Longrightarrow \sin x - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad \sin x + 3 = 0 \; \cdots\cdots \; II$$

II لمبر معادله حل نلري ځکه چې $-1 \le \sin x \le 1$

$$\Longrightarrow \sin x = 1 \Longrightarrow x = \pi/2$$

پس ټول صفحه قوسونه چې ساینونه یې یو(۱) دئ عبارت دی له: $x = n\pi + (-1)^n \pi/2$

دوهیم سوال : په لاندې معادله کې مجهوله زاویه په لاس راوړئ ؟

$$tg^2 x + 2\,tg\,x + 1 = 0$$

حل : لیدل کیږي چې د راکړل شوې معادلې چپ اړخ د $a^2 + 2ab + b^2$ شکل لري، نو لیکو چې:

$$tg^2 x + 2\,tg\,x + 1 = (tg\,x + 1)^2 = 0 \Longrightarrow tg\,x + 1 = 0 \Longrightarrow tg\,x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi^c}{4}$$

پس ټولې حقې زاويې چې نوموړې معادله تصديقوي عبارت دي له: $X = n\pi + 3\frac{\pi}{4}$

دريم سوال: په لاندې معادله کې مجهول قوس په لاس راوړئ؟

$$3\,tg^2X + (\sqrt{3}+1)\,tgX + 1 = 0$$

حل، د پورتني معادلې د حل د امکان شرط لټوو:

$$\Delta = (\sqrt{3}+1)^2 - 12 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 - 12 < 0$$

نو ذکر شوې معادله حقيقي جذرونه نلري

څلورم سوال: په لاندې معادله کې مجهوله زاويه په لاس راوړئ؟

$$Sec^2X - 2\,SecX = 0$$

حل، د ذکر شوې معادلې چپه خوا په دوو فکتورونو تجزيه کوو:

$$Sec^2X - 2\,SecX = SecX\,(SecX - 2) = 0 \Longrightarrow SecX\,(SecX - 2) = 0$$

$$\Longrightarrow SecX = 0 \;\ldots\; I \quad \text{يا} \quad SecX - 2 = 0 \;\ldots\; II$$

څرنګه چې هيڅ داسې عدد نشته چې د صفر سره يې د ضرب حاصل جوړ نو د اولې معادلې جذرونه موهومي دي.

دويمه معادله حل کوو: $SecX = +2 \Longrightarrow \frac{1}{CosX} = 2 \Longrightarrow CosX = \frac{1}{2} \Longrightarrow X = \frac{\pi}{3}$

پس ټولې حقې زاويې چې ذکر شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$$X = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{يا} \quad X = \begin{cases} 2n\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2n\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

پنځم سوال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$Cosec^2X + 2\,CosecX = 0$$

حل، د نوموړې معادلې چپه خوا په دوو فکتورونو تجزيه کوو، ليکو چې: (بل مخ)

$Cosec^2 X + 2\, Cosec X = Cosec X\,(Cosec X + 2) = 0$

$\Longrightarrow Cosec X = 0 \ldots\ I$ یا $Cosec X + 2 = 0 \ldots\ II$

داولې معادلې جذرونه موضوعي دي، دوهم لمبر معادله حل کوو:

$Cosec X + 2 = 0 \Longrightarrow Cosec X = -2 \Longrightarrow \frac{1}{\sin X} = -2$

$\Longrightarrow \sin X = -\frac{1}{2} \Longrightarrow X = \frac{7\pi}{6}$

$X = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ پس ټول حقه قوسونه چې پورتنۍ معادله تصدیقوی عبارت دی له:

شپږم سوال، په لاندې معادله کې مجهوله زاویه په لاس راوړئ؟

$(tg X + 1)\cos X = 0$

حل، په نوموړې معادله کې د $tg X$ پرځای دهغه ساوی یعنې $\frac{\sin X}{\cos X}$ وضع کوو، لیکو چې:

$(tg X + 1)\cos X = (\frac{\sin X}{\cos X} + 1)\cos X = 0$

شرط:

$\cos X \neq 0$

$X \neq \frac{\pi}{2}$

$\Longrightarrow \frac{\sin X + \cos X}{\cos X} \cdot \cos X = 0 \Longrightarrow \sin X + \cos X = 0$

$\Longrightarrow \sin X = -\cos X \Longrightarrow \sin^2 X = \cos^2 X$

$\Longrightarrow \sin^2 X = 1 - \sin^2 X \Longrightarrow 2\sin^2 X = 1 \Longrightarrow \sin^2 X = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \sin X = \pm\sqrt{\frac{2}{4}} \Longrightarrow \sin X = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow X = \pm\frac{\pi}{4}$

نو ټولې حقه زاوېې چې دپورتنۍ معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$X = n\pi^c \pm (-1)^n \frac{\pi^c}{4}$ یا $X = n\pi^c - (-1)^n \frac{\pi^c}{4}$

اووم سوال: په لاندې معادله کې مجهول قوس په لاس راوړئ؟

$2\, Cosec X\, tg X + tg X = 0$

حل، دپورتنۍ معادلې چپه خوا په دوو فکتورونو تجزیه کوو، نیکلای شو چې:

$tg X\,(2 Cosec X + 1) = 0 \Longrightarrow tg X = 0 \ldots\ I$ یا $Cosec X = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow tg\,x = 0$. یا $\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow x = 0$ ، $\sin x = -2$

پس ټول صفه قوسونه چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دئ عبارت له :

$x = n\pi + 0$ یا $x = n\pi$

اتم سوال ؛ لاندې معادله حل کړئ ؟

$$(3tg^2x - 1)(4\sin^2x - 1) = 0$$

حل ؛ په پورتنۍ معادله کې د $\sin^2x$ قیمت یعني $\frac{tg^2x}{1+tg^2x}$ ایکو، یعني ؛

$$(3tg^2x - 1)\left(\frac{4tg^2x}{1+tg^2x} - 1\right) = 0$$

څرنګه چې $1+tg^2x$ همیشه د صفر خلاف دی، نو پورتنۍ معادله داسې لیکو ؛

$$(3tg^2x-1)(4tg^2x-1-tg^2x) = 0 \Longrightarrow (3tg^2x-1)(3tg^2x-1) = 0$$

$$(3tg^2x-1)^2 = 0 \Longrightarrow 3tg^2x = 1 \Longrightarrow tg^2x = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow tg^2x = \frac{1}{3} \Longrightarrow tg\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

نو ټول صفه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له ؛ $x = n\pi + \frac{\pi}{6}$

نهم سوال ؛ لاندې معادله حل او مجهول قوس یې په لاس راوړئ ؟

$$tg^2x = -tg\,x$$

حل ؛ راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو ؛ $tg^2x + tg\,x = 0$

$$\Longrightarrow tg\,x(tg\,x+1) = 0 \Longrightarrow tg\,x = 0 \dots I \quad \text{یا} \quad tg\,x = -1$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \frac{3\pi}{4}$$

پس ټول صفه قوسونه چې د پورتنۍ معادلې جذرونه دي عبارت دي له ؛

$x = n\pi$ یا $x = n\pi + 3\pi/4$

لسم سوال: لاندې معادله حل کړئ ؟

$$\cot g^2 x + 2\cos^2 x - 3 = 0$$

په ورکړل شوې معادله کې د $\cos^2 x$ قیمت یعنې $\frac{\cot g^2 x}{1+\cot g^2 x}$ ږدو: $\cot g^2 x + \frac{2\cot g^2 x}{1+\cot g^2 x} - 3 = 0$

څرنګه چې $1+\cot g^2 x$ همیشه د صفر خلاف دی نو د معادلې دواړه خواوې یې ضربوو:

$$\cot g^2 x(1+\cot g^2 x) + 2\cot g^2 x - 3(1+\cot g^2 x) = 0$$

$$\Longrightarrow \cot g^4 x + \cot g^2 x + 2\cot g^2 x - 3 - 3\cot g^2 x = 0 \Longrightarrow \cot g^4 x - 3 = 0$$

$\Longrightarrow \cot g^4 x = 3 \Longrightarrow \cot g x = \pm\sqrt[4]{3}$ یا $tg x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

د جدول څخه د استفادې په صورت کې چې tg یې $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ دی په لاس راوړو.

یوولسم سوال، لاندې معادله حل کړئ ؟

$$(tg x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

حل: څرنګه چې دوه فکتورونه د صفر سره مساوي دي، نو لیکلای شو چې:

$tg x - 1 = 0 \dots I$ یا $\sin x = -\frac{1}{2} \dots II$

اوله معادله حل کوو: $tg x - 1 = 0 \Longrightarrow tg x = 1 \Longrightarrow x = \pi/4$

اوس دوهمه معادله حل کوو: $\sin x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = 7\pi/6$

نو مطلوب څخه قوسونه چې د پورتنۍ معادلې جذرونه دي، عبارت دي له:

$$x = n\pi + \pi/4$$

او

$$x = n\pi + (-1)^n \, 7\pi/6$$

دولسم سوال : دلاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ ؟

$3\,tg X - cotg X = 0$

حل : په راکړل شوې معادله کې د $cotg X$ قیمت یعنې $\frac{1}{tg X}$ لیکو ،

$\Longrightarrow 3\,tg X - cotg X = 3\,tg X - \frac{1}{tg X} = 0$

د په لاس راغلې معادلې دواړه خواوې په $tg X$ کې ضربوو ، په هغه صورت کې چې

چې $tg X \neq 0$ یا $X \neq n\pi \quad n \in Z + \{0\}$

$\Longrightarrow 3\,tg^2 X - 1 = 0 \Longrightarrow 3\,tg^2 X = 1 \longrightarrow tg^2 X = \frac{1}{3} \longrightarrow tg X = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

هغه زاویه چې tg یې $\frac{1}{\sqrt{3}}$ دی عبارت د وله $\pi/6$ څخه نو ټولې هغه زاوې چې د پورتنی

معادلې جذرونه دی ، عبارت دی له : $X = n\pi + \pi/6$ یا $X = n\pi + \frac{2\pi}{3}$

دیارلسم سوال : لاندې معادله حل کړئ ؟

$Sec X + 1 = 2 \cos X$

حل : راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو : $2 \cos^2 X - \cos X - 1 = 0$

اما په دې شرط چې $\cos X \neq 0$ یا $X \neq \pi/2$ وی .

$\Longrightarrow \cos^2 X - 1 + \cos^2 X - \cos X = 0 \Longrightarrow (\cos X - 1)(\cos X + 1) + \cos X(\cos X - 1) = 0$

$\Longrightarrow (\cos X - 1)(2\cos X + 1) = 0 \Longrightarrow \cos X - 1 = 0 \ldots I$

یا $2\cos X + 1 = 0 \ldots II$

$\Longrightarrow \cos X = 1 \qquad \cos X = -\frac{1}{2}$

لومړنی معادله حل کوو : $\Longrightarrow X = 0 \qquad X = \frac{4\pi}{6}$

نو ټول هغه قوسونه چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له ،

$X = 2n\pi + 0$ او $X = 2n\pi \pm \frac{4\pi}{6}$

(3) $75^\circ 30' = ?$

پوهېږو چې:

$75^\circ 30' = (75 + \frac{1}{2})^\circ = (\frac{151}{2})^\circ$

$180^\circ = \pi^c$

$(151)^\circ = X \implies X = \frac{151\pi}{2 \cdot 180}$

$X = \frac{151\pi^c}{360}$

(4) $120^\circ 40' = ?$

خرنګه چې $40' = (\frac{2}{3})^\circ$ نو

$120^\circ 40' = (120 + \frac{2}{3})^\circ$

$180^\circ = \pi^c$

$\frac{362^\circ}{3} = X \implies X = \frac{\overset{181}{362} \cdot \pi^c}{3 \cdot \underset{90}{180}}$

$X = \frac{181\pi^c}{270}$

(5) $12^\circ 12' 12'' = ?$

خرنګه چې:

$12^\circ 12' 20'' = (12 + \frac{12}{60} + \frac{20}{3600})^\circ = (\frac{2197}{18})^\circ$

$180^\circ = \pi^c$ اوس کولای شو چې یو تناسب جوړ کړو، یعنې

$(\frac{2197}{180})^\circ = X \implies X = \frac{\frac{2197 \cdot \pi}{180}}{180} = \frac{2197\pi^c}{180 \cdot 180} = \frac{2197\pi^c}{32400}$

دویم سوال: دالاندې زاویې په درجه بدلې کړئ؟

(1) $\frac{\pi^c}{4}$

حل: ددې لپاره یو تناسب جوړوو، یعنې:

$180^\circ = \pi^c$

$X = \frac{\pi^c}{4} \implies X = (\frac{\overset{45}{180}\pi}{\underset{1}{4}\pi})^\circ \implies X = 45^\circ$

څوارلسم سوال : د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ ؟

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

حل : د راکړل شوې معادلې د حل د امکان شرط گورو ، د دې مطلب لپاره یې تاسمه

تشکیلوو ، یعنې : $\Delta = 1+8 = 9 > 0$

نو معادله حل لري او په دې ډول یې لیکو : $2\sin^2 x - \sin x - 1 = (\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$

$\Longrightarrow \sin x - 1 = 0 \; \ldots . I$ یا $2\sin x + 1 = 0 \; \ldots . II$

لومړی معادله حل کوو : $\Longrightarrow \sin x = 1 \longrightarrow x = \pi/2$

اوس دویمه معادله حل کوو : $\Longrightarrow 2\sin x = -1 \longrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = 7\pi/6$

پس ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له :

$x = n\pi + (-1)^n \pi/2$ او $x = n\pi + (-1)^n \, 7\pi/6$

پنځلسم سوال : لاندې معادله حل کړئ ؟

$3\,tg x \sin x - tg x = 0$ $\qquad (3\sin x - 1)\, tg x = 0$

$\Longrightarrow 3\sin x = 1 \; \ldots . I$ یا $tg x = 0 \; \ldots . II$

$\Longrightarrow \sin x = \frac{1}{3}$ یا $x = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}^+ + \{0\}$

پس ټول هغه قوسونه چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له : $x = n\pi$

د $\sin x = \frac{1}{3}$ معادلې د حل لپاره د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه په لاس راوړو

او هغه زاویه چې $\sin$ یې $0,3333$ دی د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه $19^\circ \; 22' \; 54''$

$\Longrightarrow x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \, 19^\circ \; 22' \; 54''$

شپاړسم سوال : د لاندې معادلې جذرونه تعین کړئ ؟

$2\cos x - \sec x = 0$

حل: په راکړل شوې معادله کې $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ وضع کوو او د معادلې اطراف په $\cos x$ کې ضربوو، خو په دې شرط چې $x \neq \pi/2$ یا $\cos x \neq 0$ وي.

$$\Longrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow x = \pi/4$$

نو ټولې صحه زاويې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له: $x = 2n\pi \pm \pi/4$

اوولسم سوال: په لاندې معادله کې مجهول قوسونه په لاس راوړئ؟

$$2\sin x + \operatorname{cosec} x = 3$$

حل: په راکړل شوې معادله کې د $\operatorname{cosec} x$ قیمت $\frac{1}{\sin x}$ وضع کوو، لیکو چې:

$$\Longrightarrow 2\sin x + \frac{1}{\sin x} = 3 \quad \ldots\ldots \quad (x \neq 0, \pi, \ldots, n\pi \quad n \in \mathbb{N})$$

$$\Longrightarrow 2\sin x + \operatorname{cosec} x - 3 = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x - \sin x + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\sin x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \ldots\ldots I \quad \text{یا} \quad \sin x - 1 = 0 \ldots\ldots II$$

I نمبر معادله حل کوو:

$$2\sin x = 1 \Longrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pi/6$$

اوس II نمبر معادله حل کوو:

$$\sin x - 1 = 0 \Longrightarrow \sin x = 1$$

$$\Longrightarrow x = \pi/2$$

پس ټول صحه قوسونه چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$$x = n\pi + (-1)^n \pi/6$$

$$\text{یا} \quad x = n\pi + (-1)^n \pi/2$$

اتلسم سوال : دلاندې معادلې جذرونه تعين کړئ ؟

$tg^2x - 1 = 0$

راکړل شوې معادله داسې لیکو : $(tgx-1)(tgx+1) = 0$

$\longrightarrow tgx = 1 \;\ldots\ldots\; I$ یا $tgx = -1 \;\ldots\; II$

I لمبی معادله حل کوو : $\longrightarrow x = \pi/4$ یا $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \ldots$

نو متولې خطه راوړې چې دپورتنۍ معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$x = n\pi + \pi/4$ یا $x = n\pi + 7\pi/4$

نولسم سوال : لاندې معادله حل کړئ ؟

$\cos^2 x = -\frac{1}{2}$

حل : راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو : $2\cos^2 x + 1 = 0$

څرنګه چې $2\cos^2x+1$ همیشه د صفر خلاف دی نو راکړل شوې معادله حل نلری .

(۲۰) شلم سوال : د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ ؟

$\sin^2 x = -\frac{1}{2}$

حل : راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو :

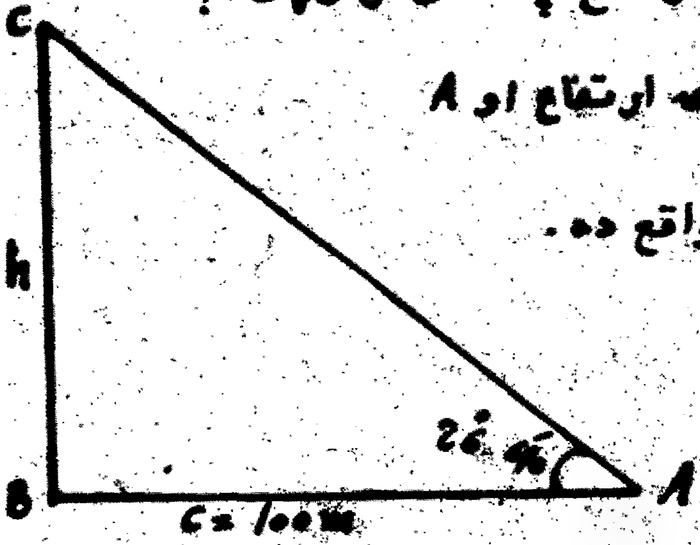
$2\sin^2 x + 1 = 0$

څرنګه چې $\sin^2x+1$ هیڅکله نه صفر کیږي ، یعنې همیشه د صفر مخالف دی ، نو پورتنۍ معادله جذرونه نلری .

دیوولسم ټولګی د مثلثاتو مربوط مسائل

د څلورم تمرین حل

لومړی سوال : له یوې نقطې نه چې دیوې غونډۍ له بیخ نه 100 m لرې ده، دغونډۍ دڅوکې دارتفاع زاویه (26°) ده ، دغونډۍ ارتفاع په لاس راوړئ ؟



حل : لاندې شکل په نظر کې نیسو چې BC دغونډۍ ارتفاع او A هغه نقطه ده چې دغونډۍ له بیخ نه 100 m لرې واقع ده.

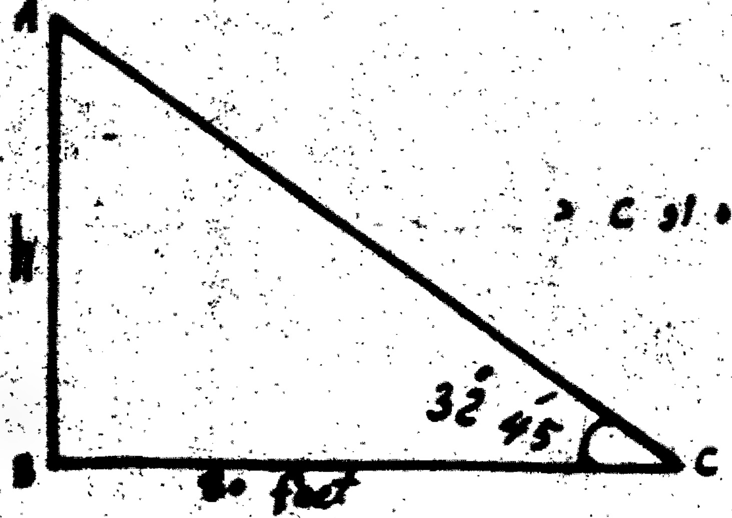
څرنګه چې غونډۍ په افقي سطحه عموده ده، نو د $\hat{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$tg\, 26^\circ 40' = \frac{a}{c} \Longrightarrow a = c \cdot tg\, 26^\circ 40'$$

$tg\, 26^\circ 40'$ په جدول کې $0,50222$ معلومېدلای شوې :

$$a = 100 \cdot 0,50222\, m \Longrightarrow a = 50,222\, m$$

دویم سوال : که دلمر دارتفاع زاویه ($32^\circ 45'$) وی دیوې پایې سیوری 80 feet دی، دپایې اوږدوالی به څومره وی ؟



حل : AB چې په h ښودل شوې بنایو دپایې ارتفاع ده او C د پایې دسیوری دانجام نقطه ده، نو د $\hat{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

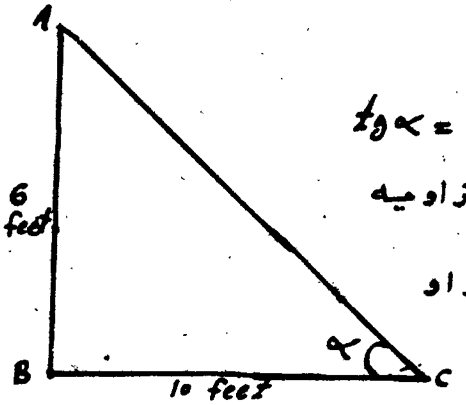
$$tg\,C = \frac{h}{80\,feet} \Longrightarrow h = 80\; tg\,32^\circ 45'\; feet$$

$tg\;32^\circ 45'$ په جدول کې 0,64322 مومو، نو لیکلای شو چې:

$h = 80 \cdot 0,64322\; feet$ یا $h = 51,4576\; feet$

دریم سوال: که دیوسړی سیوری چې (6 feet) قد ولري (10 feet) وي، دلمر دارتفاع زاویه دافق سره حساب کړئ؟

حل: په لاندې قایم الزاویه مثلث کې AB دسړي قد او BC دسړي دسیوري اوږدوالی دی. نو د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:



$$tg\,\alpha = \frac{6\,feet}{10\,feet} \Longrightarrow tg\,\alpha = 0,60000$$

د 0,60000 عدد په جدول کې نشته نو د $\hat{C}$ زاویه راساً په لاس نه راځي د انترپولیشن څخه کار اخلو او د $\hat{C}$ زاویه په لاس راوړو.

$$tg\;30^\circ 58' = 0,60007$$

$$\frac{tg\;30^\circ 57'}{60''} = -\frac{0,59967}{0,00040}$$

په دویم قدم کې د 0,60000 اوکوچنی زاویې ($30^\circ 57'$) دنسبت ترمنځ فرق پیداکوو چې:

$$\begin{array}{r} 0,60000 \\ -\,0,59976 \\ \hline 0,00033 \end{array}$$

په دریم قدم کې یو تناسب جوړوو لیکو چې:

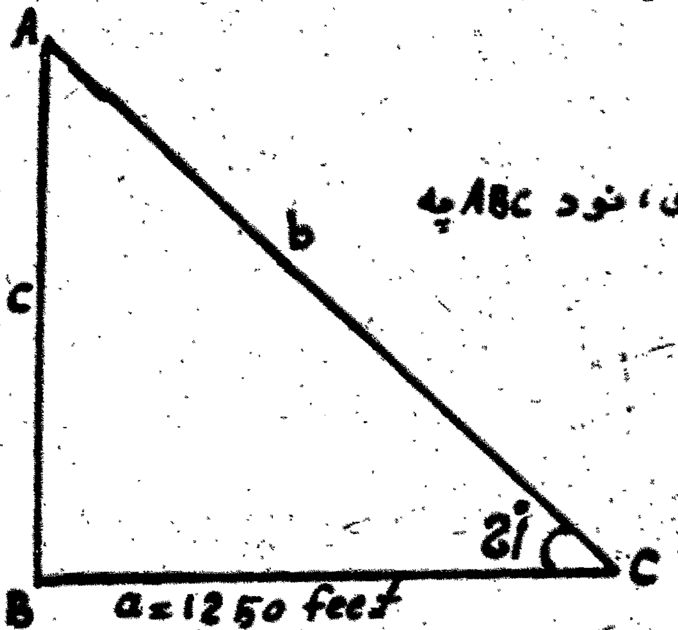
$60''$ $\quad$ 40

X $\quad$ 33

$$\Longrightarrow X = \left(\frac{33 \cdot 60}{40}\right)'' \qquad \Longrightarrow X = (49,5)''$$

په آخرکې x دکوچنۍ زاویې یعنې ($3^\circ 57'$) سره جمع کړو، دجمعې حاصل یې عبارت دی زمونږ له مطلوب ($\hat{\alpha}$) څخه یعنې: $\hat{\alpha} = 3^\circ 57' 49{,}5''$ یا $\hat{\alpha} = x + 3^\circ 57'$

څلورم سوال: که دلمر دارتفاع زاویه 21° وي، د مصر دلوی هرم سیوری 1250 feet اوږدوالی لري. دهرم ارتفاع محاسبه کړئ ؟



حل: AB دهرم اوږدوالی او BC دهرم سیوری دی، نو د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

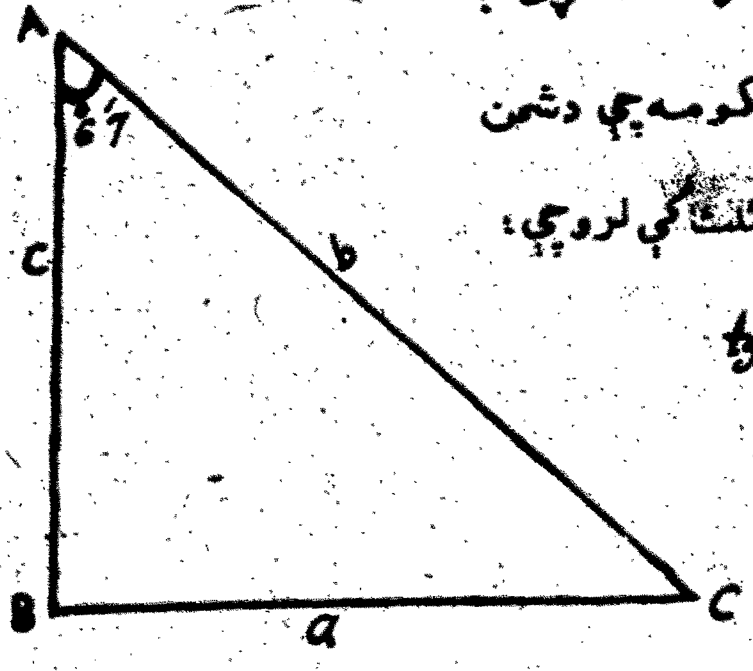
$$tg\,C = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AB = BC\ tg\,C \quad \cdots\ I$$

په I نمبر رابطه کې د $\hat{C}$ او $\overline{BC}$ په ځای دهغوی مربوطه قیمتونه وضع کړو یعنې: $AB = 1250\ tg\,21^\circ$ feet

$tg\,21^\circ$ په جدول کې 0,38386 پیداکولای شو، نو لیکو چې:

$$AB = 1250 \cdot 0{,}38386 \text{ feet} \Longrightarrow AB = 479{,}825 \text{ feet}$$

پنځم سوال: یو مترصد له یوه بالون څخه چې 1200 feet لوړ دی د زره دار دښمن دتنزیل زاویه $6^\circ 7'$ لولي د زره داري قطعې افقي فاصله معلومه کړئ ؟



حل: AB دبالون ارتفاع او c نقطه هغه نقطه ده کومه چې دښمن هلته موقعیت لري. د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,A = \frac{a}{c} \Longrightarrow a = c\ tg\,A$$

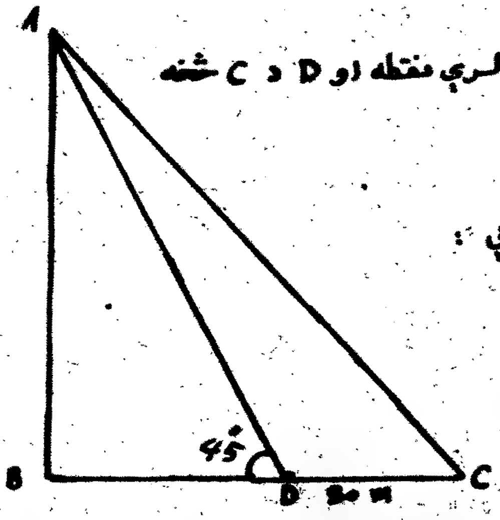
څرنګه چې $c = 1200$ feet او $\hat{A} = 6^\circ 7'$

نو لیکلای شو چې: $a = 1200 \cdot tg\,6^\circ 7'$

$tg\,6^\circ 7'$ په جدول کې 0,10716 ده. موږ، پس

$$= 1200 \cdot 0{,}10716 \text{ feet} \Longrightarrow a = 128{,}592 \text{ feet}$$

شپږم سوال: دیوه برج دڅوکې دارتفاع د زاویې $tg\ 5/12$ دی او د یوې بلې نقطې څخه چې $80\ m$ برج ته له لومړۍ نقطې څخه نږدې ده دارتفاع زاویه 45° ده د برج ارتفاع معلومه کړئ؟



حل: AB دبرج ارتفاع د C نقطه دبرج څخه لرې نقطه او D د C څخه وبرج ته نږدې نقطه ده.

لومړی د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,C = \frac{AB}{BC} \quad \ldots\ I$$

دویم د ABD په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,D = \frac{AB}{BD} \quad \ldots\ II$$

$$\xrightarrow{I} AB = BC\ tg\,C \qquad \xrightarrow{I,\,II} BC\ tg\,C = BD\ tg\,D$$

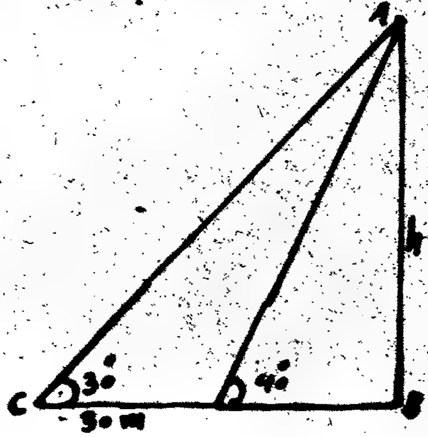
$$\xrightarrow{II} AB = BD\ tg\,D$$

څرنګه چې $tg\,C = \frac{5}{12}$ او $tg\,D = 1$ کېږي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{5}{12}(BD + 80\,m) = BD \longrightarrow 5\,BD + 400\,m = 12\,BD \longrightarrow 7\,BD = 400\,m$$

$$\longrightarrow BD = \frac{400}{7}\,m \quad \text{یا} \quad BD = 57,143\,m \ \text{تقریباً}$$

اووم سوال: دیوه دودکش ارتفاع معلومه کړئ که $30\ m$ ورنږدې شو، د ارتفاع زاویه یې له 30° نه تر 40° ته رسیږي.



حل: د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$tg\,30^\circ = \frac{h}{BC}$$

څرنګه چې $BC = 30\,m + BD$ نو

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{30 + BD} \longrightarrow h = (30 + BD)\,tg\,30^\circ$$

دویم د ABD په قایم الزاویه مثلث کې لروچې: $tg\,40^\circ = \frac{h}{BD} \longrightarrow h = BD\,tg\,40^\circ$

د اولې او دویمې (I) (II) رابطو د مقایسې په نتیجه کې لیکلای شوچې:

$(30+BD)\,tg\,30^\circ = BD\,tg\,40^\circ \Longrightarrow 30\,tg\,30^\circ + BD\,tg\,30^\circ = BD\,tg\,40$

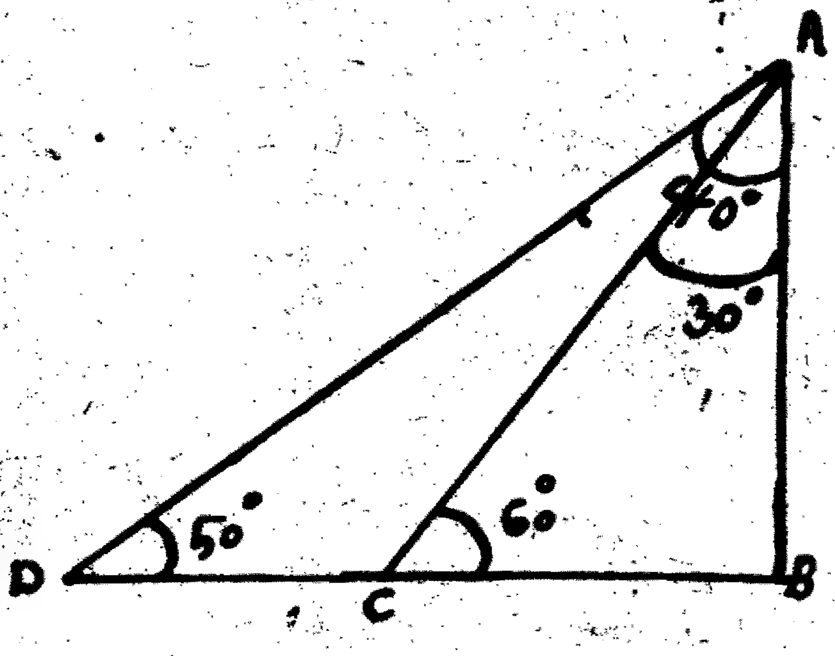
$\Longrightarrow BD = \frac{30 \cdot 0{,}5774}{0{,}8391-0{,}5774}\,m \longrightarrow BD = \frac{30 \cdot 0{,}5774}{0{,}2617}\,m \Longrightarrow BD = 66{,}19\,m$

$BC = (30+66{,}19)\,m \Longrightarrow BC = 96{,}19\,m$

لروچې: $tg\,30^\circ \frac{h}{BC} \Longrightarrow h = 96{,}19 \cdot 0{,}5774\,m$

$\longrightarrow h = 55{,}540106\,m$ یا تقریباً $h = 55{,}541\,m$

اتم سوال: دیوه ترصد برج 200 feet ارتفاع لری، دوه کشتۍ په بحر کې لنگر اچولی دی او دواړه دبرج سره په یوه مستقیمه خط واقع شوی دی، که دتنزیل زاوی دبرج دشوکې نه 30° او 40° وی ددواړو کشتیو ترمنځ مسافه محاسبه کړئ؟



حل: D او C ددواړو کشتیو موقعیتونه او AB دبرج ارتفاع ده.

د ABD په قایم الزاویه مثلث کې لروچې:

$tg\,40^\circ = \frac{BD}{200\,feet} \longrightarrow BD = 200 \cdot tg\,40^\circ\,feet$

$BD = 200 \cdot 0{,}93910\,feet = 187{,}82\,feet$

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لروچې:

$tg\,30^\circ = \frac{BC}{200\,feet} \Longrightarrow BC = 200 \cdot 0{,}57735\,feet = 115{,}47\,feet$

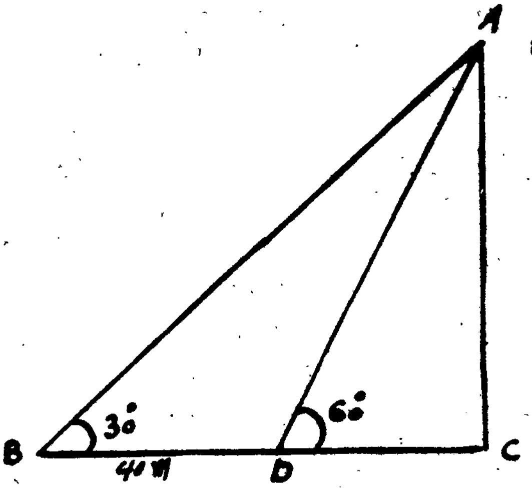
که شکل ته وګورو لیکلای شوچې:

$CD = BD - BC$

$\longrightarrow CD = (187{,}82 - 115{,}47)\,feet$

$= 62{,}35\,feet$

نهم سوال : یو نفرچې د یوه نهر په غاړه ولاړ دی دیوې ونې دڅوکې دارتفاع زاویه چې په مقابله غاړه ولاړه ده $60°$ په لاس راوړې او 40 فټه وروسته ځي زاویه $30°$ کیږي دونې لوړوالی او دنهر بر څو دی ؟



حل : CD دنهر بر او AC دونې ارتفاع ده او د BD فاصله 40 feet ده ، او

$$BC = 40\ feet + CD$$

د ABC په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$tg\,30° = \frac{AC}{40+CD} \Longrightarrow 40\,tg\,30 + CD\,tg\,30 = AC$$

$$\Longrightarrow AC = \frac{40}{\sqrt{3}} + \frac{CD}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ I$$

او همدارنګه د ACD په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې :

$$tg\,60 = \frac{AC}{CD} \Longrightarrow AC = CD \cdot \sqrt{3} \quad \ldots\ II$$

د I او II لمبر رابطو دمقایسې په نتیجه کې لیکلای شو چې :

$$CD\sqrt{3} = \frac{40+CD}{\sqrt{3}} \Longrightarrow 3\,CD = 40 + CD \Longrightarrow 2\,CD = 40\ feet$$

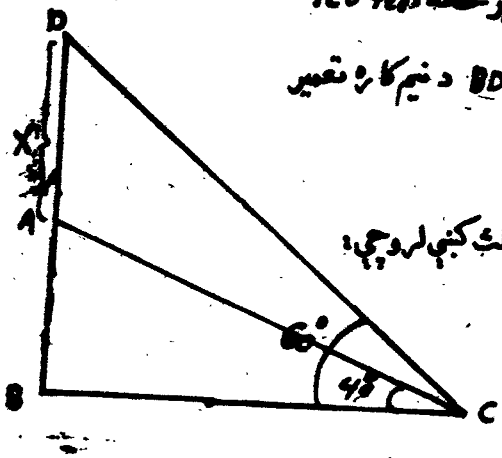
$$\Longrightarrow CD = 20\ feet$$

که په II رابطه کې د CD قیمت وضع کړو په لاس به راشي چې :

$$AC = 20 \cdot 1{,}732\ feet = 34{,}64\ feet$$

لسم سوال : دیوه نیم کاره تعمیر دارتفاع زاویه له یوې نقطې نه چې 120 feet متره واقع ده $40°$ ده ، داودانۍ څومره لوړه شي چې د همغې نقطې نه د ودانۍ دارتفاع زاویه $60°$ شي ؟

حل : C هغه نقطه ده کومه چي د نیم کاره تعمیر څخه 120 feet واقع ده ، AB د نیمګړي تعمیر ارتفاع ده ، BD د نیم کاره تعمیر او د مطلوبې ارتفاع مجموعه ده .



اوس نو د CBD په قایم الزاویه مثلث کښي لرو چي:

$$tg\,60^\circ = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{120\ feet} \Longrightarrow BD = 120\cdot\sqrt{3}\ feet$$

$$\Longrightarrow BD = 120\cdot 1,732\ feet \Longrightarrow BD = 207,84\ feet$$

دوهم : د ABC په قایم الزاویه مثلث کي لرو چي :

$$tg\,40^\circ = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow AB = BC\ tg\,40^\circ\ feet$$

$$= 120\cdot 0,93910\ feet \quad = 112,692\ feet$$

مطلوب هو - AD دی، AD داسې په لاس راوړو :

$$AD = BD - AB$$

$$= (207,840 - 112,692)\ feet$$

$$= 95,148\ feet$$

(2) $\frac{7\pi}{10}^c = ?$

$180^\circ = \pi^c$

$X = \frac{7\pi}{10}^c \Longrightarrow X = \left(\frac{\frac{7\pi}{10}\cdot 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{7\cdot 18\pi}{\pi}\right)^\circ \Longrightarrow X = 126^\circ$

(3) $\frac{5\pi}{6}^c = ?$

$180^\circ = \pi^c$

$X = \frac{5\pi}{6}^c \Longrightarrow X = \left(\frac{5\pi\cdot \overset{30}{180}}{\underset{1}{6}\pi}\right)^\circ \Longrightarrow 150^\circ$

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^c = ?$

پوهېږو چې :

$\frac{22}{7}^c = 180$

$\left(\frac{1}{4}\right)^c = X \Longrightarrow X = \frac{\frac{22}{7}^c\cdot 180^\circ}{\frac{1}{4}}$

$= \frac{7\cdot \overset{45}{180}}{\underset{22}{88}} = \left(\frac{315}{22}\right)^\circ$

(5) $\left(\frac{7}{6}\right)^c = ?$

حل: یو تناسب جوړ وو، لیکو چې :

$\frac{22}{7}^c = 180^\circ$

$\frac{7}{6}^c = X \Longrightarrow X = \left(\frac{\frac{7}{6}\cdot 180}{\frac{22}{7}}\right)^\circ = \left(\frac{7\cdot \overset{15}{30}}{1}\cdot\frac{7}{\underset{11}{22}}\right)^\circ = \left(\frac{695}{11}\right)^\circ$

دریم سوال: صفحه دایره چې شعاع یې (30) انچه ده، دلاندینیو قوسونو د زاویو قیمت یې په رادیان سره پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې : $\frac{\text{دقوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې شعاع}} =$ زاویه د رادیان له جنسه

نو د پورتنی فرمول په اساس لیکو چې :

(1) صفحه قوس چې (30) انچه دی، مقابل زاویه یې حسابوو لیکو چې :

$1^c = \frac{30 \text{ inch}}{30 \text{ inch}} =$ د زاویې قیمت د رادیان له جنسه

(2) صفحه قوس چې (20) انچه وی مقابل زاویه یې : $\left(\frac{20}{30}\right)^c = \left(\frac{2}{3}\right)^c =$ د زاویې قیمت یې

دویم فصل

د دولسم ټولګی د مثلثاتو مربوط مسائل

د لومړی تمرین حل

لومړی سوال، که $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ او $\cos\beta = \frac{8}{17}$ وی د $(\alpha+\beta)$ مثلثاتی نسبتونه پیدا کړئ؟

حل: د مثلثاتو د اولنی اساسی رابطې په بنا لیکلای شو چې:

$$\cos\alpha = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Longrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

څرنګه α حاده او مثبت ده نو $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

همدارنګه لیکلای شو چې:

$$\sin^2\beta = 1-\frac{(8)^2}{(17)^2} = \frac{(17)^2-(8)^2}{(19)^2} = \frac{(17-8)(17+8)}{(17)^2}$$

$$= \frac{9\cdot 25}{(17)^2} \Longrightarrow \sin\beta = \frac{3\cdot 5}{17} = \frac{15}{17}$$

څرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{17} + \frac{3}{5}\cdot\frac{15}{17} = \frac{32+45}{85} = \frac{77}{85}$$

همدارنګه $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\Longrightarrow \cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}-\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}=-\frac{36}{85}$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\frac{77}{85}}{\frac{-36}{85}}=-\frac{77}{36}$$

دویم سوال:

که $tga=\frac{4}{3}$ او $tg\beta=\frac{16}{14}$ وی، د $(a-\beta)$ مثلثاتی نسبتونه پیداکړئ؟

حل: څرنګه چې $\sin a=\frac{tga}{\sqrt{1+tg^2a}}$ وی نو لیکلای شو چې:

$$\sin a=\frac{4/3}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}\Longrightarrow \sin a=\frac{4/3}{5/3}=\frac{4}{5}$$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2a}}$ نو لیکو چې:

$$\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}\Longrightarrow \cos a=\frac{3}{5}$$

لرو چې: $tg\beta=\frac{16}{14}$ ⟸ لیکلای شو چې:

$$\sin\beta=\frac{\frac{16}{14}}{\sqrt{1+(\frac{16}{14})^2}}=\frac{8}{\sqrt{113}}$$

پوهېږو چې: $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta$ نو لیکو چې

$$\cos^2\beta=1-\frac{64}{113}\Longrightarrow \cos\beta=\frac{7}{\sqrt{113}}$$

اوس $\sin(a-\beta)$ په لاس راوړو، نو لیکو چې: $\sin(a-\beta)=\sin a\cos\beta-\cos a\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{113}}-\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{\sqrt{113}}=\frac{4}{5\sqrt{113}}$$

په همدې ډول $\cos(a-\beta)=\cos a\cos\beta+\sin a\sin\beta$

$$\Longrightarrow \cos(a-\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{113}}+\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{\sqrt{113}}=\frac{32+21}{5\sqrt{113}}=\frac{53}{5\sqrt{113}}$$

اوس $tg(a-\beta)$ په لاس راوړو. څرنګه چې: $tg(a-\beta)=\frac{tga-tg\beta}{1+tga\,tg\beta}$

$$\Longrightarrow tg(a-\beta)\,\frac{\frac{4}{3}-\frac{16}{14}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{4}}=\frac{-4}{53}$$

دریم سوال: که $\sin a=\frac{45}{50}$ او $\sin\beta=\frac{33}{65}$ وی د $(a+\beta)$ مثلثاتی نسبتونه تعین کړئ؟

حل: لومړے $\cos a$ او بیا $\cos\beta$ په لاس راوړو او بالاخره $tg\,a$ او $tg\,\beta$ په لاس راوړلای شو.

$$\cos^2 a = 1-\sin^2 a \Longrightarrow \cos^2 a = 1-\frac{(45)^2}{(53)^2}$$

$$=\frac{(53)^2-(45)^2}{(53)^2} = \frac{[(53)-45]\,(53+45)}{(53)^2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{(4)^2\cdot(7)^2}{(53)^2}} = \frac{28}{53}$$

اوس $\cos\beta$ په لاس راوړو:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$\Longrightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{(65-33)(65+33)}{(65)^2}} = \sqrt{\frac{98\cdot 32}{(65)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2)^2\cdot(7)^2\cdot(4)^2}{(65)^2}} = \frac{56}{65}$$

اوس $tg\,\alpha$ په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Longrightarrow tg\,\alpha = \frac{\frac{45}{53}}{\frac{28}{53}} = \frac{45}{28}$$

اوس $tg\,\beta$ په لاس راوړو، څرنګه چې $\sin\beta$ او $\cos\beta$ لرو، نو کولای شو چې $tg\,\beta$ په لاس راوړو:

$$tg\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \Longrightarrow tg\,\beta = \frac{\frac{33}{65}}{\frac{56}{65}} = \frac{33}{56}$$

اوس $\sin(\alpha+\beta)$ په لاس راوړو، څرنګه چې $\sin(a+\beta) = \sin a\cos\beta + \cos a \sin\beta$

په پورتنۍ معادله کې د نوموړو نسبتونو قیمتونه وضع کوو، یعنې:

$$\sin(a+\beta) = \frac{45}{53}\cdot\frac{56}{65} + \frac{28}{53}\cdot\frac{33}{65} = \frac{45\cdot 65+28\cdot 33}{53\cdot 65} \Longrightarrow \sin(a+\beta) = \frac{3444}{3445}$$

اوس $\cos(a+\beta)$ په لاس راوړو، څرنګه چې: $\cos(a+\beta) = \cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta$

په پورتنۍ رابطه کې د نوموړو نسبتونو قیمتونه وضع کوو، لیکلای شو چې:

$$\cos(a+\beta) = \frac{28}{53}\cdot\frac{56}{65} - \frac{45}{53}\cdot\frac{33}{65} \longrightarrow \cos(a+\beta) = \frac{28\cdot 56-45\cdot 33}{53\cdot 65} = \frac{83}{3445}$$

$tg\,(a+\beta)$ په لاندې ډول په لاس راوړو، چون:- $tg\,(a+\beta) = \frac{\sin(a+\beta)}{\cos(a+\beta)}$

$$\Longrightarrow tg\,(a+\beta) = \frac{\frac{3444}{3445}}{\frac{83}{3445}} = \frac{3444}{83}$$

څلورم سوال: ثبوت کړئ چې: $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta)^2-(\sin\beta\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$$

$$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta$$

$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

پنځم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\cos(45+\alpha)\cos(45-\alpha)+\sin(45+\alpha)\sin(45-\alpha)=\cos 2\alpha$$

حل: د راکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې $45+\alpha=x$ او $y=45-\alpha$ وضع کړو

نو لاندې شکل به غوره کړي:

$$\cos(45+\alpha)\cos(45-\alpha)+\sin(45+\alpha)\sin(45-\alpha)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$=\cos(x-y)$$

اوس که د x او y په ځای دهغه مربوط قیمتونه وضع کړو به لاس راځي چې:

$$\cos(45+\alpha)\cos(45-\alpha)+\sin(45+\alpha)\sin(45-\alpha)=\cos[(45+\alpha)-(45-\alpha)]$$

$$=\cos[45+\alpha-45+\alpha]=\cos 2\alpha$$

شپږم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\cos(45+\alpha)\cos(45-\beta)-\sin(45+\alpha)\sin(45-\beta)=\sin(\beta-\alpha)$$

حل: د راکړل شوی مطابقت په چپه خوا کې $45+\alpha=x$ او $y=45-\beta$ فرض

کړو نو د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\cos(45+\alpha)\cos(45-\beta)-\sin(45+\alpha)\sin(45-\beta)=\cos[45+\alpha+45-\beta]$$

$= \cos[90+(\alpha-\beta)] \quad = -\sin(\alpha-\beta) \quad = \sin(\beta-\alpha)$

اووم سوال : ثبوت کړئ چې :

$\sin(45+\alpha)\cos(45-\beta)+\cos(45+\alpha)\sin(45-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$

حل : د راکړل مطابقت په چپ اړخ کې $X = 45+\alpha$ او $y = 45+\beta$ وضع کړو

لاندې شکل غوره کوی :

$\sin(45+\alpha)\cos(45-\beta)+\cos(45+\alpha)\sin(45-\beta)=\sin X\cos y+\cos X\cos y$

$= \sin(X+y)$

اوس د X او y پرځای د هغوی مربوط قیمتونه وضع کوو ، لیکو چې :

$\sin(45+\alpha)\cos(45-\beta)+\cos(45+\alpha)\sin(45-\beta = \sin(45+\alpha+45-\beta)$

$= \sin[90+(\alpha-\beta)] \quad = \cos(\alpha-\beta)$

اتم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$$

حل په راکړی شوی مطابقت چپ اړخ کښ انکشاف ورکوو ، لیکو چې :

$$=\frac{\cos C\sin(A-B)+\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\cos C[\sin A\cos B-\sin B\cos A]+\cos A[\sin B\cos C-\cos B\sin C]}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\frac{\cos B[\sin C\cos A-\cos C\sin A]}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\sin A\cos B\cos C-\cos A\sin B\cos C+\sin B\cos C\cos A-\cos B\cos A\sin C+\sin C\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\frac{\cos C\cos B\sin A}{}$$

$$=\frac{0}{\cos A\cos B\cos C}$$

$= 0$

نهم سوال، ثبوت کړئ چې : $\sin(105^\circ) + \cos(105^\circ) = \cos 45^\circ$

حل ، پوهیږو چې : $\sin(105^\circ) = \sin(60+45)$ او $\cos(105^\circ) = \cos(60+45)$

$\Longrightarrow \sin(105^\circ) + \cos(105^\circ) = \sin(60+45) + \cos(60+45)$

$= \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45 + \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$

څرنګه چې : $\sin 45 = \cos 45 \Longrightarrow \sin 60 \sin 45 - \sin 60 \sin 45 + \cos 60 \cos 45$

$+ \cos 60 \cos 45 = \frac{1}{2} \cos 45 + \frac{1}{2} \cos 45 = \cos 45$

لسم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos(105^\circ) + \cos(15^\circ)$

حل ، څرنګه چې $\sin(75^\circ) = \cos(90-75)$ او $-\sin(15^\circ) = \sin(-15^\circ)$

$= \cos 15$ $= \cos[90-(-15)]$

$= \cos[90+15]$

$= \cos(105)$

$\Longrightarrow \sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \sin 75^\circ + \sin(-15^\circ)$

$= \cos(90-75) + \cos[90-(-15)]$

$= \cos 15 + \cos(90+15) = \cos 15 + \cos(105^\circ)$

یوولسم سوال ، ثبوت کړئ چې ،

$\cos a \cos(\gamma - a) - \sin a \sin(\gamma - a) = \cos \gamma$

حل ، که دپورتنی مطابقت چپ لوری کې $a = X$ او $\gamma - a = y$ وضع کړو نو

لیکلای شو چې : $\cos a \cos(\gamma - a) - \sin a \sin(\gamma - a) = \cos X \cos y - \sin X \sin y$

$= \cos(X+y)$

اوس که د X او y مربوط قیمتونه وضع کړو ، په لاس راځي چې :

$$\cos a \cos(\gamma - a) - \sin a \sin(\gamma - a) = \cos[a + (\gamma - a)]$$

$$= \cos(a + \gamma - a) = \cos\gamma$$

دولسم سوال: که چېرې $\cos\beta = \frac{2}{3}$ او $\sin a = \frac{1}{2}$ وي $(a+\beta)$ او $(a-\beta)$

په ستندرد حالت کښې په کومه ناحیه کې واقع دي؟

حل: ددې مطلب لپاره لومړی $\cos a$ او $\sin\beta$ په لاس راوړو، یعنې:

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} \qquad \cos a = \sqrt{1-\sin^2 a}$$

$$= \sqrt{1-\frac{4}{9}} \qquad = \sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{9-4}{9}} \qquad = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{5}{3}}$$

اوس $\sin(a+\beta)$ او $\cos(a+\beta)$ په لاس راوړو.

پوهېږو چې:

$$\sin(a+\beta) = \sin a \cos\beta + \cos a \sin\beta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2+\sqrt{15}}{6} > 0$$

په همدې دول $\cos(a+\beta)$ په لاس راوړو، یعنې:

$$\cos(a+\beta) = \cos a \cos\beta - \sin a \sin\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6} > 0$$

ځرنګه چې $\sin(a+\beta) > 0$ او $\cos(a+\beta) > 0$ نو معلومه ده چې په

اوله ناحیه کې واقع ده.

دویم: ګورو چې $a-\beta$ په کومه ناحیه کې واقع ده.

ځرنګه چې:

$$\sin(a-\beta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{15}}{6} < 0$$

په عمدي ډول $\cos(a-\beta)$ ګورو. څرنګه چي:

$$\cos\cos(a-\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} > 0$$

څرنګه چي: $\sin(a-\beta) < 0$ او $\cos(a-\beta) > 0$ نو معلومه ده چي $(a-\beta)$ په څلورمه ناحیه کي واقع ده.

دیارلسم سوال: که چیري $tg\,a = \frac{2}{3}$ او $\cot\beta = 2$ او $a-\beta$ دزاویو دمثلثاتي نسبتونو اشاري تعین کړئ؟

حل: څرنګه چي $\sin a = \frac{tg\,a}{\sqrt{1+tg^2 a}} \Longleftarrow \sin a = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}}$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

همدارنګه $\cos^2 a = 1-\sin^2 a$

$$\Downarrow$$

$$\Longrightarrow \cos a = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

لروچي $tg\,\beta = \frac{1}{2}$ او پوهیږو چي $\sin\beta = \frac{tg\,\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$

$$\Longrightarrow \sin\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

څرنګه چي:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} \Longleftarrow \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

اوس $\sin(a+\beta)$ په لاس راوړو، لیکلای شو چي:

$$\sin(a+\beta) = \sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta$$

$$\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4+\sqrt{3}}{\sqrt{65}} > 0$$

همدارنګه:

$$\cos(a+\beta) = \cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{13\cdot 5}} > 0$$

څرنګه چې $\sin(a+\beta)>0$ او $\cos(a+\beta)>0$ نو $(a+\beta)$ په اوله ناحیه کې واقع دی.

اوس د $(a-\beta)$ زاویې دمثلثاتي نسبتونو اشارې ګورو، څرنګه چې:

$$\sin(a-\beta)=\sin a\cos\beta-\cos a\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\frac{1}{\sqrt{13\cdot5}}>0$$

په همدې ډول

$$\cos(a-\beta)=\cos a\cos\beta+\sin a\sin\beta$$

$$=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt5}>0$$

څرنګه چې $\sin(a-\beta)>0$ او $\cos(a-\beta)>0$ پس $tg(a-\beta)>0$ او $ctg(a-\beta)>0$ نو $(a-\beta)$ په اوله ناحیه کې واقع ده.

څوارلسم سوال: که چیرې $tg\,a=2$ او $\sec\beta=3$ د $a+\beta$ او $a-\beta$ زاویو دمثلثاتي نسبتونو اشارې تعین کړئ؟

حل: څرنګه چې: $\sin a=\frac{tg\,a}{\sqrt{1+tg^2a}}$ نو لیکلای شو چې: $\sin a=\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt5}$

په همدې ډول لرو چې: $\cos\beta=\frac13$ نو لیکلای شو چې: $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$$=\sqrt{1-\frac19}=\frac{\sqrt8}{3}$$

همدارنګه لرو چې $\sin a=\frac{2}{\sqrt5}$ نو لیکلای شو چې: $\cos a=\sqrt{1-\sin^2a}=\sqrt{1-\frac45}=\frac{1}{\sqrt5}$

اوس کولای شو چې $\sin(a+\beta)$ په لاس راوړو او اشاره تعین کړو:

$$\sin(a+\beta)=\sin a\cos\beta+\cos a\sin\beta=\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac13+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt8}{3}$$

$$=\frac{2+\sqrt8}{3\sqrt5}>0\implies\sin(a+\beta)>0$$

همدارنګه لرو چې:

$$\cos(a+\beta)=\cos a\cos\beta-\sin a\sin\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac13-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt8}{3}=\frac{1-4\sqrt2}{3\sqrt5}<0\implies\cos(a+\beta)<0$$

څرنګه چې $\sin(a+\beta)>0$ او $\cos(a+\beta)<0$

$\longrightarrow tg(\alpha+\beta)<0$ او $Ctg(\alpha+\beta)<0$

نو حکم کولای شو چې $(\alpha+\beta)$ په دویمه ناحیه کې واقع ده.

اوس د $(\alpha-\beta)$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو اشارې ګورو، پوهېږو چې:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac13-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt8}{3}$$

$$=\frac{2-2\sqrt2}{3\sqrt5}<0\Longrightarrow\sin(\alpha-\beta)<0$$

همدارنګه پوهېږو چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac13+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt8}{3}>0$

څرنګه چې $\sin(\alpha-\beta)<0$ او $\cos(\alpha-\beta)>0$ پس $tg(\alpha-\beta)<0$ او $Ctg(\alpha-\beta)<0$

پس $(\alpha-\beta)$ په څلورمه ناحیه کې واقع دی.

پنځلسم سوال: که چېرې $\cos(\alpha+\beta)=\frac35$ او $\sin\beta=\frac15$ وي، نو $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ او $tg\alpha$ په لاس راوړئ؟

حل: څرنګه چې $\cos(\alpha+\beta)=\frac35$ پس $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\frac{9}{25}}$

په همدې ډول څرنګه چې $\sin\beta=\frac15$ پس $\cos\beta=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{24}}{5}$

څرنګه چې $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

په پورته مساواتو کې د موجوده مثلثاتي نسبتونو مربوط قیمتونه ږدو. پس:

$$\frac35=\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{24}}{5}-\sin\cdot\frac15\ \ldots I\qquad 3\cdot\sqrt{24}=24\cos\alpha-\sqrt{24}\sin\alpha$$

$$\frac45=\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{24}}{5}+\cos\alpha\cdot\frac15\ \ldots II\quad\Longrightarrow\quad 4=\cos\alpha+\sqrt{24}\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow 4+3\cdot\sqrt{24}=25\cos\alpha\Longrightarrow\cos\alpha=\frac{4+3\cdot\sqrt{24}}{25}$$

د اولې معادلې څخه لیکلای شو چې: $\sin\alpha=\sqrt{24}\cos\alpha-3=\sqrt{24}\cdot\frac{4+3\cdot\sqrt{24}}{25}-3$

$$=\frac{4\cdot\sqrt{24}+3\cdot(\sqrt{24})^2}{25}-3\Longrightarrow tg\alpha=\frac{\frac{4\sqrt{24}-3}{25}}{\frac{4+3\cdot\sqrt{24}}{25}}=\frac{4\sqrt{24}-3}{4+3\sqrt{24}}$$

$$Ctg\alpha=\frac{\frac{4+3\cdot\sqrt{24}}{25}}{\frac{4\sqrt{24}-3}{25}}\Longrightarrow Ctg\alpha=\frac{4+3\sqrt{24}}{4\sqrt{24}-3}$$

(3) هغه قوس چې 150 inch دی:

د زاویې قیمت یې $= (\frac{50}{30})^c = (\frac{5}{3})^c$

څلورم سوال: هغه دایره چې شعاع یې (24) انچه ده دلاندینو زاویو دقوسونو اوږدوالی یې معلوم کړئ؟

$150^\circ ،\ 75^\circ ،\ \frac{3}{5}\pi^c ،\ (\frac{2}{3})^c$

حل:
$$\text{د زاویې قیمت د رادیان له جنسه} = \frac{\text{دقوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې شعاع}}$$

$\Longrightarrow$ دقوس اوږدوالی = زاویه د رادیان له جنسه $\times$ شعاع

(1) نو هغه زاویه چې قیمت یې $(\frac{2}{3})^c$ دی، دقوس اوږدوالی یې:

دقوس اوږدوالی $= \frac{2}{3}\cdot 24\ \frac{inch}{inch}\ inch = 16\ inch$

(2) هغه زاویه چې قیمت یې $\frac{3}{5}\pi^c$ دی، دقوس اوږدوالی یې:

دقوس اوږدوالی $= \frac{3}{5}\cdot\frac{22}{7}\cdot 24 = 226,28\ inch$

(3) هغه زاویه چې قیمت یې 75° دی، لومړی یې د رادیان له جنسه حسابوو او بیا دپورته په شان دمخامخ قوس اوږدوالی په لاس راوړو یعنې:

$$\begin{array}{l} 180^\circ = \frac{22}{7}^c \\ 75^\circ = X \end{array} \Longrightarrow X = (\frac{75\cdot 22}{7\cdot 180}) \Longrightarrow X = (\frac{55}{42})^c$$

دقوس اوږدوالی $= 24\cdot\frac{55}{42}\ inch = 23,57\ inch$

(4) هغه زاویه چې قیمت یې 150° دی دقوس اوږدوالی یې حسابوو:

$$\begin{array}{l} 180^\circ = \frac{22}{7}^c \\ 150^\circ = X \end{array} \Longrightarrow X = (\frac{150\cdot 22}{180\cdot 7})^c = (\frac{55}{21})^c$$

دقوس اوږدوالی $= 24\cdot\frac{55}{21} = 62,85\ inch$

شپاړسم سوال: که چیرې $\sin\beta = \frac{1}{5}$ او $\cos(a-\beta) = \frac{3}{5}$ وي نو $\sin a$ او $\cos a$ او $tg\, a$ په لاس راوړئ؟

حل: څرنګه چې $\cos(a-\beta) = \frac{3}{5}$ نو $\sin(a-\beta) = \sqrt{1-\frac{9}{25}}$

په همدې ډول لروچې $\sin\beta = \frac{1}{5}$ نو $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$

څرنګه چې: $\cos(a-\beta) = \cos a \cos\beta + \sin a \sin\beta$

$$\Longrightarrow \frac{3}{5} = \cos a \frac{\sqrt{24}}{5} + \sin a \cdot \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad 3 = \sqrt{24}\cos a + \sin a \ldots\ \text{I}$$

په همدې ډول لروچې: $\sin(a-\beta) = \sin a \cos\beta - \cos a \sin\beta$

$$\Longrightarrow \frac{4}{5} = \sin a \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} - \cos a \cdot \frac{1}{5} \quad \text{یا} \quad 4 = \sqrt{24}\sin a - \cos a \ldots\ \text{II}$$

اوله او دویمه معادله حل کوو:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= \sqrt{24}\cos a + \sin a \\ 4\cdot\sqrt{24} &= -\sqrt{24}\cos a + 24\sin a \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 3 + 4\sqrt{24} = 25\sin a$$

$$\Longrightarrow \sin a = \frac{3+4\sqrt{24}}{25}$$

په II معادله کې د $\sin a$ قیمت وضع کوو په لاس راځي چې:

$$\cos a = \sqrt{24}\cdot\frac{3+4\sqrt{24}}{25} - 4 = \frac{3\sqrt{24}-4}{25}$$

$$\Longrightarrow tg\, a = \frac{\frac{3+4\sqrt{24}}{25}}{\frac{3\sqrt{24}-4}{25}}$$

یا

$$\Longrightarrow tg\, a = \frac{3+4\sqrt{24}}{3\sqrt{24}-4}$$

د دولسم ټولګی د مثلثاتو مربوط سوالونه

د دویم تمرین حل

لومړی سوال: د $2a$ مثلثاتی نسبتونه په لاس راوړئ، که چیرې

a: $\cos a = \frac{3}{5}$ ، b: $\sin a = \frac{12}{13}$ ، c: $tg\, a = \frac{16}{63}$

د a جز حل:

څرنګه چې $\cos a$ راکړل شویدی کولای شو چې $\sin a$ او $tg\, a$ په لاس راوړو:

$$\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} \qquad \sin a = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\Longrightarrow tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

اوس د $2a$ مثلثاتی نسبتونه په لاندې ډول په لاس راوړو:

څرنګه چې $\sin a = \frac{4}{5}$ او $\cos a = \frac{3}{5}$ $\Longrightarrow \sin 2a = 2\sin a \cos a$

$$= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

او همدارنګه $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$$

$tg\, a$ لرو، نو $tg\, 2a$ داسې په لاس راوړو:

$$tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1-tg^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{-7}$$

د <u>b</u> جز حل:

څرنګه چې $\sin a = \frac{12}{13}$ پس،

$$\cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13} \Longrightarrow \sin 2a = 2\sin a \cos a = 2\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

په همدې ډول

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = -\frac{119}{169}$$

$$tg\, 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = -\frac{120}{119}$$

د <u>c</u> جز حل:

لرو چې $tg\, a = \frac{16}{63}$ ، څرنګه چې،

$$\sin a = \frac{tg\, a}{\sqrt{1+tg^2 a}} \Longrightarrow \sin a = \frac{\frac{16}{63}}{\sqrt{1+\left(\frac{16}{63}\right)^2}} \Longrightarrow \sin a = \frac{\frac{16}{63}}{\frac{65}{63}} = \frac{16}{65}$$

پوهېږو چې:

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 a}} \Longrightarrow \cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{16}{63}\right)^2}} = \frac{63}{65}$$

اوس کولای شو چې د $2a$ مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو:

لمړی: $\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2\cdot\frac{16}{65}\cdot\frac{63}{65} = \frac{2016}{4225}$

دوهم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(\frac{63}{65}\right)^2 - \left(\frac{16}{65}\right)^2 = \frac{63-16}{65}\cdot\frac{63+16}{65} = \frac{47}{65}\cdot\frac{79}{65}$

دریم: $tg\, 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} \Longrightarrow tg\, 2a = \frac{2016}{(65)^2}\cdot\frac{(65)^2}{47\cdot 79} = \frac{2016}{3713}$

څلورم:

$$\cot g\, 2a = \frac{1}{tg\, 2a} \Longrightarrow \cot g\, 2a = \frac{3713}{2016}$$

دویم سوال: د 2a مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ، که a: $\cos a=\frac{15}{17}$ ؛ b: $\sin a=\frac{4}{5}$ ؛ c: $tg\, a=\frac{5}{12}$ وي؟

د a جزحل: لومړی sin a په لاس راوړو.

(1) لومړی: $\sin a=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{(17-15)(17+15)}{(17)^2}}$

$= \sqrt{\frac{2\cdot 32}{(17)^2}} = \frac{8}{17}$

(2) دویم: $\Longrightarrow \sin 2a = 2\sin a\cos a = 2\cdot\frac{8}{17}\cdot\frac{15}{17} = \frac{240}{289}$

(3) دریم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(\frac{15}{17}\right)^2 - \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{161}{(17)^2}$

(4) څلورم: $tg\, 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$

$= \frac{\frac{240}{(17)^2}}{\frac{161}{(17)^2}} = \frac{240}{161}$

د b جزحل: لومړی cos a په لاس راوړو.

1/ $\cos a = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

2/ $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{(5)^2}$

3/ $\cos 2a = 1-2\sin^2 a = 1-2\cdot\frac{16}{25} = \frac{-7}{(5)^2}$

4/ $tg\, 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a}$

$= \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$

د c جزحل، tg a له رو-کولای شو چې sin a او cos a په لاس راوړو:

1/ $\sin a = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}$

$\sin a = \frac{\frac{15}{12}}{\frac{\sqrt{(12)^2+(5)^2}}{12}} = \frac{15}{13}$

2/ $\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}}$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{144+25}}{12}} = \frac{12}{13}$

3/ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$= 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13}$

$= \frac{120}{169}$

4/ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$= (\frac{12}{13})^2 - (\frac{5}{13})^2$

$= \frac{7}{13} \cdot \frac{17}{13} = \frac{119}{169}$

5/ $tg 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{120}{169} \cdot \frac{169}{119}$

$= \frac{120}{119}$

دریم سوال: ثبوت کړئ چي : $\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = tg a$

حل : څرنګه چي $1+\cos 2a = 2\cos^2 a$ او $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ نو د

راکړل شوی مطابقت په چپه خوا کي دهغوی مساوی قیمتونه وضع کوو، یعني :

$$\frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \frac{\not{2} \sin a \not{\cos a}}{\not{2} \cos^{\not{2}} a} = \frac{\sin a}{\cos a} = tg a$$

څلورم سوال ، ثبوت کړئ چي : $\frac{\sin 2a}{1-\cos a} = \cot g a$

دراکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کي د $\sin 2a$ او $1-\cos 2a$ مربوط قیمتونه وضع کوو،

یعني:
$$\frac{\sin 2a}{1-\cos 2a} = \frac{2 \sin a \cos a}{2 \sin^2 a} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot g a$$

پنځم سوال ، ثبوت کړئ چي :-

$$\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} = tg^2 a$$

حل: دنوموړی مطابقت په چپه خوا کي د $1-\cos 2a$ او $1+\cos 2a$ مربوط قیمتونه

وضع کوو، لیکو چي ؛
$$\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a} = \frac{\not{2} \sin^2 a}{\not{2} \cos^2 a} = tg^2 a$$

شپږم سوال : ثبوت کړئ چي : $tg a + \cot g a = 2\operatorname{cosec} 2a$

حل ، دموړی مطابقت په چپه خواکي د $\cot g a = \frac{1}{tg a}$ قیمت وضع کوو، لیکو:

$$tg a + \cot g a = tg a + \frac{1}{tg a} = \frac{1+tg^2 a}{tg a} = \sec^2 a \cdot \cot g a$$

$$= \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{2}{2 \sin a \cos a} = 2 \cdot \frac{1}{\sin 2a} = 2 \operatorname{Cosec} 2a$$

اووم سوال: ثبوت کړئ چې: $tg\,a - ctg\,a = -2\,ctg\,a$

حل: د مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې:

$$tg\,a - ctg\,a = -\left[\frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a}\right] = -\left[\frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a}\right]$$

$$= \frac{-2\cos 2a}{2 \sin a \cos a} = -2 \cdot \frac{\cos 2a}{\sin 2a} = -2\, Ctg\, 2a$$

اتم سوال: ثبوت کړئ چې $\operatorname{Cosec} 2a + ctg\, 2a = ctg\, a$

حل: د نوموړي مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې:

$$\operatorname{Cosec} 2a + ctg\, 2a = \frac{1}{\sin 2a} + \frac{\cos 2a}{\sin 2a}$$

$$= \frac{1 + \cos 2a}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a}{2 \sin a \cos a} = ctg\, a$$

نهم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = tg\frac{A}{2}\, ctg\frac{B}{2}$$

حل: د راکړل شوي مطابقت کیڼ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې:

$$\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \frac{1 - \cos A + \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B}{1 + \cos A - \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$= \frac{1 - \cos A + \cos B(1 - \cos A) + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{1 + \cos A - \cos B(1 + \cos A) + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)(1 + \cos B) + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{(1 + \cos A)(1 - \cos B) + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{4\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2} + 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{4\cos^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2} + 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)}{4\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = tg \frac{A}{2} \cot g \frac{B}{2}$$

لسم سوال : ثبوت کړئ چې : $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} - \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A} = 2 tg 2a$

حل : د مطابقت چپه خوا دوه کسرونو تفاضل دی، مربوطه عملیه پرې اجرا کوو، لیکو چې :

$$\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} - \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A} = \frac{(\cos A+\sin A)^2-(\cos A-\sin A)^2}{\cos^2 A-\sin^2 A}$$

$$= \frac{[(\cos A+\sin A)-(\cos A-\sin A)][(\cos A+\sin A)+(\cos A-\sin A)]}{\cos 2A}$$

$$= \frac{[\cos A+\sin A-\cos A+\sin A][\cos A+\sin A+\cos A-\sin A]}{\cos 2A}$$

$$= \frac{2\sin A \cdot 2\cos A}{\cos 2A} = \frac{2\cdot(2\sin A\cos A)}{\cos 2A} = 2 tg 2a$$

یوولسم سوال : ثبوت کړئ چې : $\frac{1}{2}(\cot g \frac{A}{2} + tg \frac{A}{2}) = \operatorname{cosec} A$

حل : د راکړل شوی مطابقت په چپه خواکې د $tg \frac{A}{2} = \frac{1}{\cot g \frac{A}{2}}$ وضع کوو، په لاس راځي چې :

$$\frac{1}{2}(\cot g \frac{A}{2} + tg \frac{A}{2}) = \frac{1}{2}(\cot g \frac{A}{2} + \frac{1}{\cot g \frac{A}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cot g^2 \frac{A}{2}}{\cot g \frac{A}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} \cdot tg \frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\sin A}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(\cot g \frac{A}{2} + tg \frac{A}{2}) = \operatorname{cosec} A$$

دولسم سوال : ثبوت کړئ چې : $\frac{1}{2}(\cot g \frac{A}{2} - tg \frac{A}{2}) = \cot g A$

حل : د $\cot g \frac{A}{2} \pm tg \frac{A}{2}$ وضع کوو، لیکو چې :

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\cos 2\cdot\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\cos A}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos A}{\sin A}=\operatorname{ctg} A$$

دیارلسم سوال : ثبوت کړئ چې : $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}=\sin(A+B)$

حل: د راکړل شوی مطابقت د چپ اړخ د صورت د لومړي حد د زاویې سره $B-B=0$ جمع کوو، یعنې:

$$\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin(A-B)}=\frac{\sin^2[(A+B)-B]-\sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{(\sin(A+B)\cos B-\cos(A+B)\sin B)^2-\sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin^2(A+B)\cos^2 B+\cos^2(A+B)\sin^2 B-2\sin(A+B)\cos(A+B)\cos B\sin B-\sin^2 B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin^2(A+B)\cos^2 B-\sin^2 B[1-\cos^2(A+B)]-\sin(A+B)\cos(A+B)\cdot 2\cos B\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin^2(A+B)\cos^2 B-\sin^2 B\sin^2(A+B)-\sin(A+B)\cdot\cos(A+B)\cdot\sin 2B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin^2(A+B)[\cos^2 B-\sin^2 B]-\sin(A+B)\cos(A+B)\sin 2B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin^2(A+B)\cos 2B-\sin(A+B)\cos(A+B)\sin 2B}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin(A+B)[\sin(A+B)\cos 2B-\cos(A+B)\sin 2B]}{\sin(A-B)}$$

$$=\frac{\sin(A+B)[\sin(A+B-2B)]}{\sin(A-B)}=\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin(A-B)}$$

$$=\sin(A+B)$$

خوارلسم سوال : ثبوت کړئ چي : $\frac{\cos A}{1-\sin A} = tg(45^\circ + \frac{A}{2})$

حل : پوهيږو چي $\cos A = \sin(90+A)$ او همدارنګه $-\sin A = \cos(90+A)$

$$\Longrightarrow \frac{\cos A}{1-\sin A} = \frac{\sin(90+A)}{1+\cos(90+A)} = \frac{\sin 2\cdot\frac{90+A}{2}}{2\cos^2\frac{90+A}{2}}$$

$$= \frac{2\sin(45+A/2)\cos(45+A/2)}{2\cos^2(45+A/2)} = \frac{\sin(45+A/2)}{\cos(45+A/2)} = tg(45+A/2)$$

پنځلسم سوال : ثبوت کړئ چي :

$$tg(45+\theta) - tg(45-\theta) = 2\,tg\,2\theta$$

حل : د راکړل شوی مطابقت چپ خوا ته انکشاف ورکوو او ليکو چي :

$$tg(45+\theta) - tg(45-\theta) = \frac{\sin(45+\theta)}{\cos(45+\theta)} - \frac{\sin(45-\theta)}{\cos(45-\theta)}$$

$$= \frac{\sin(45+\theta)\cos(45-\theta) - \cos(45+\theta)\sin(45-\theta)}{\cos(45+\theta)\cos(45-\theta)}$$

$$= \frac{\sin[(45+\theta)-(45-\theta)]}{\cos(45+\theta)\sin[90-(45-\theta)]} = \frac{\sin(45+\theta-45+\theta)}{\cos(45+\theta)\sin(45+\theta)}$$

$$= \frac{2\sin 2\theta}{2\sin(45+\theta)\cos(45+\theta)} = \frac{2\sin 2\theta}{\sin(90+2\theta)}$$

$$= \frac{2\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2\,tg\,2\theta$$

شپاړسم سوال : ثبوت کړئ چي : $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = tg\,\theta$

حل: د پورتني مطابقت په چپ اړخ کي د $\sin 2\theta$ او $1+\cos 2\theta$ قيمتونه ليکو،

يعني: $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta+\cos\theta} = \frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$$= \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)} = tg\,\theta$$

اووه لسم سوال : ثبوت کړئ چې

$$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=tg\,\theta/2$$

حل : دراکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې د $1+\cos\theta$ ر $1-\cos\theta$ او $\sin\theta$ مربوط قیمتونه لیکو، یعنې :

$$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}=\frac{2\sin^2\theta/2+2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2+2\sin\theta/2\cos\theta/2}$$

$$=\frac{2\sin\theta/2(\sin\theta/2+\cos\theta/2)}{2\cos\theta/2(\cos\theta/2+\sin\theta/2)}=\frac{\sin\theta/2}{\cos\theta/2}=tg\,\theta/2$$

اتلسم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$(\sec 2\theta+1)(\sqrt{\sec^2\theta-1})=tg\,2\theta$$

حل : دراکړل شوی مطابقت په چپ اړخ کې د $\sec 2\theta=\frac{1}{\cos 2\theta}$ وضع کوو ،

لیکو چې :

$$(\sec 2\theta+1)(\sqrt{\sec^2\theta-1})=\frac{1+\cos 2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{2\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{\cos 2\theta\cdot\cos\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=tg\,2\theta$$

نولسم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\sin A+\sin B+\sin(A+B)=4\cos A/2\cos B/2\sin\frac{A+B}{2}$$

حل : دراکړل شوی مطابقت چپ اړخ کې $\sin(A+B)$ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې :

$$\sin A+\sin B+\sin(A+B)=\sin A+\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$=\sin A(1+\cos B)+\sin B(1+\cos A)$$

$$=2\sin A/2\cos A/2\cdot 2\cos^2 B/2+2\sin B/2\cos B/2\cdot 2\cos^2 A/2$$

$$=4\cos A/2\cos^2 B/2\sin A/2+4\cos^2 A/2\cos B/2\sin B/2$$

پنځم سوال : یو موټر چې سرعت یې $12\ mil/h$ دی دهغې دایرې په قوس چې شعاع یې 3000 فوټه ده حرکت کوی. معلوم کړئ چې په یوه دقیقه کې دکومې منحنی زاویې قوس طی کوی ؟

حل : پوهیږو چې رادیان دهغې زاویې له قیمت څخه عبارت دی دکومې چې دمخامخ قوس اوږدوالی ددایرې د شعاع سره مساوی وی

یعنې : $\frac{\text{دقوس اوږدوالی}}{\text{ددایرې شعاع}} =$ (زاویه د رادیان له جنسه)

دملې خواڅرنګه چې : $1\ mil = 1609\ m$ او $1\ inch = 39,37\ inch$ کیږی نو کولای چې هغه فاصله چې په میل راکړل شوې په انچ سره واړ وو یعنې

$12\ mil = 12 \cdot 1609 \cdot 39,37\ inch$

$= 760155,96\ inch$

په همدې ډول پوهیږو چې : $3\ inch = 1\ feet$

$760155,96\ inch = x\ feet$

$$\Longrightarrow x = \frac{760155,96}{3} \frac{inch}{1inch} feet = 253385,32\ feet$$

نو ویلای شو چې دنوموړی موټر سرعت مساوی دی په :

$$\text{دموټر سرعت} = \frac{253385,32\ feet}{h}$$

اوس غواړو چې په یوه دقیقه کې دموټر سرعت معلوم کړو نولیکو چې:

$$\text{دموټرسرعت} = \frac{253385,32\ feet}{60\ mil}$$

$= 4223,0886\ feet/mil$

یعنې نوموړی موټر په یوه دقیقه کې $4223,0886\ feet$ لاره طی کوی.

اوس که غواړو چې د نوموړی قوس د مقابل مرکزی زاویې قیمت

$$= 4 \cos \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{B}{2} \left(\sin \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{B}{2} + \cos \tfrac{A}{2} \sin \tfrac{B}{2} \right)$$

$$= 4 \cos \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{B}{2} \left[\sin \left(\tfrac{A}{2} + \tfrac{B}{2} \right) \right]$$

$$= 4 \cos \tfrac{A}{2} \cos \tfrac{B}{2} \sin \frac{A+B}{2}$$

شلم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\sin a \cdot \sin(60 - a) \cdot \sin(60 + a) = \frac{1}{4} \sin 3a$$

حل : د راکړل شوی مطابقت چپې خواته انکشاف ورکوو، لیکو چې :

$$\sin a \cdot \sin(60 - a) \cdot \sin(60 + a) = \sin a (\sin 60 \cos a - \cos 60 \sin a)$$
$$(\sin 60 \cos a + \cos 60 \sin a)$$

$$= \sin a \left[(\sin 60 \cos a)^2 - (\cos 60 \sin a)^2 \right]$$

$$= \sin a \left[\frac{3 \cos^2 a}{4} - \frac{\sin^2 a}{4} \right] = = \sin a \left[\frac{3 \cos^2 a - \sin^2 a}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \sin a \cdot \left[3 (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a \right] = \frac{1}{4} (3 \sin a - 3 \sin^3 a - \sin^3 a)$$

$$= \frac{1}{4} (3 \sin a - 4 \sin^3 a) = \frac{1}{4} \sin 3a$$

یوویشتم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\cos a \cdot \cos(60 - a) \cdot \cos(60 + a) = \frac{1}{4} \cos 3a$$

حل : د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې :

$$\cos a \cdot \cos(60 - a) \cdot \cos(60 + a) = \cos a \left[(\cos a \cos 60 + \sin a \sin 60) \right.$$
$$\left. (\cos a \cos 60 - \sin a \sin 60) \right]$$

$$= \cos a \left[\cos^2 a \cos^2 60 - \sin^2 a \sin^2 60 \right] = \cos a \left[\frac{\cos^2 a}{4} - \frac{3 \sin^2 a}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\cos^3 a - 3 \cos a (1 - \cos^2 a) \right] = \frac{1}{4} (\cos^3 a - 3 \cos a + 3 \cos^3 a)$$

$$= \frac{1}{4} (4 \cos^3 - 3 \cos a) = \frac{1}{4} (\cos 3a)$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

دریم تمرین

لومړی سوال، واضح کړئ چې: $\cos^2 6a - \sin^2 6a = ?$

حل، څرنګه چې $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ پس،

$$\cos^2 6a - \sin^2 6a = \cos 2 \cdot 6a = \cos 12a$$

دویم سوال: واضح کړئ چې: $2\sin 5X \cos 5X = ?$

حل، څرنګه چې: $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ پس،

$$2\sin 5X \cdot \cos 5X = \sin 2 \cdot 5X = \sin 10X$$

دریم سوال، واضح کړئ چې: $\frac{2\tan 3X}{1-\tan^2 3X} = ?$

حل، څرنګه چې، $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha$ پس:

$$\frac{2\tan 3X}{1-\tan^2 3X} = \tan 2 \cdot 3X = \tan 6X$$

څلورم سوال:

واضح کړئ چې، $\frac{1-\cos 6X}{2} = ?$

څرنګه چې: $\cos 6X = \cos^2 3X - \sin^2 3X$ او $1 = \sin^2 3X + \cos^2 3X$

پس:

$$\frac{1-\cos 6X}{2} = \frac{\sin^2 3X + \cos^2 3X - (\cos^2 3X - \sin^2 3X)}{2} =$$

$$= \frac{\sin^2 3X + \cos^2 3X - \cos^2 3X + \sin^2 3X}{2} = \frac{2\sin^2 3X}{2} = \sin^2 3X$$

پنځم سوال، واضح کړئ چې:

$$\sqrt{\frac{1-\cos 8y}{1+\cos 8y}} = ?$$

حل: څرنګه چې، $1-\cos 8y = 2\sin^2 4y$ او $1+\cos 8y = 2\cos^2 4y$

پس:

$$\sqrt{\frac{1-\cos 8y}{1+\cos 8y}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 4y}{2\cos^2 4y}} = tg\, 4y$$

شپږم سوال، واضح کړئ چې:

$$\frac{2\cos^2 3X - 1}{2} = ?$$

حل، پوهیږو چې $1 = \sin^2 3X + \cos^2 3X$ پس:

$$\frac{2\cos^2 3X - 1}{2} = \frac{2\cos^2 3X - \sin^2 3X - \cos^2 3X}{2} = \frac{\cos^2 3X - \sin^2 3X}{2} = \frac{1}{2}\cos 6X$$

اووم سوال: واضح کړئ چې: $2\sin \frac{X}{3} \cos \frac{X}{3} = ?$

حل: پوهیږو چې: $2\sin a \cos a = \sin 2a$ پس:

$$2\sin \frac{X}{3} \cos \frac{X}{3} = \sin 2 \cdot \frac{X}{3} = \sin \frac{2X}{3}$$

اتم سوال واضح کړئ چې: $\sin 4X \cos 4X = ?$

حل: راکړل شوي افاده په $\frac{2}{2}$ کې ضربوو، لیکو چې:

$$\sin 4X \cos 4X = \frac{2\sin 4X \cos 4X}{2} = \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 4X = \frac{1}{2}\sin 8X$$

نهم سوال: واضح کړئ چې:

$$1 - 2\sin^2 8y = ?$$

حل: پوهیږو چې، $1 = \sin^2 8y + \cos^2 8y$ پس:

$$1 - 2\sin^2 8y = \sin^2 8y + \cos^2 8y - 2\sin^2 8y$$

$$= \cos^2 8y - \sin^2 8y = \cos 2 \cdot 8y$$

$$= \cos 16y$$

لسم سوال: معلوم کړئ چې:

$$\frac{tg\,5X}{1-tg^2 5X}=?$$

حل، نوموړې نسبت په $\frac{2}{2}$ کې ضربوو، لیکو چې:

$$\frac{tg\,5X}{1-tg^2 5X}=\frac{2\,tg\,5X}{2(1-tg^2 5X)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\,tg\,5X}{1-tg^2 5X}$$

$$=\frac{1}{2}\,tg\,2\cdot 5X=\frac{1}{2}\,tg\,10X$$

یوولسم سوال، معلوم کړئ چې:

$$\frac{2\,tg\,2X}{tg^2 2X-1}=?$$

حل: پوهېږو چې، $tg^2 2X-1=-(1-tg^2 2X)$ پس:

$$\frac{2\,tg\,2X}{tg^2 2X-1}=\frac{2\,tg\,2X}{-(1-tg^2 2X)}=-\frac{2\,tg\,2X}{1-tg^2 2X}$$

$$=-tg\,2\cdot 2X=-tg\,4X$$

دولسم سوال: معلوم کړئ چې:

$$\sqrt{\frac{1+\cos 3X}{1-\cos 3X}}=?$$

حل، پوهېږو چې، $1+\cos 3X=2\cos^2\frac{3X}{2}$ او $1-\cos 3X=2\sin^2\frac{3X}{2}$

پس:

$$\sqrt{\frac{1+\cos 3X}{1-\cos 3X}}=\sqrt{\frac{2\cos^2 3X/2}{2\sin^2 3X/2}}=\sqrt{Ctg^2\,3X/2}=Ctg\,3X/2$$

دیارلسم سوال، واضح کړئ چې:

$$\frac{1-\cos 10X}{2}=?$$

حل: پوهېږو چې: $1-\cos 10X=2\sin^2\frac{10X}{2}=2\sin^2 5X$ پس:

$$\frac{1-\cos 10X}{2}=\frac{2\sin^2 5X}{2}=\sin^2 5X$$

څوارلسم سوال: معلوم کړئ چې:

$$\frac{1+\cos 2X}{2}=?$$

حل: پوهېږو چې: $1+\cos 2X=2\cos^2\frac{2X}{2}=2\cos^2 X$

پس:

$$\frac{1+\cos 2X}{2}$$

$$=\frac{2\cos^2 X}{2}$$

$$=\cos^2 X$$

دضرب دفارمولونو ثبوت په دویمه طریقه

۱ـ ثبوتوو چي : $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

د x سره $y-y=0$ جمع کوو ، یعني :

$$\sin x + \sin y = \sin[(x+y)-y] + \sin y$$

$$= \sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y + \sin y$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos y + \sin y[1-\cos(x+y)]$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos y + 2\sin y\sin^2\frac{x+y}{2}$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\left[\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{2y}{2} + \sin\frac{2y}{2}\sin\frac{x+y}{2}\right]$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\left[\cos\left(\frac{x-y}{2} - \frac{2y}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

۲ـ ثبوتوو چي : $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

همدارنګه په $\cos x$ کي د x سره $y-y=0$ جمع کوو ، لیکو چي :

$$\cos x + \cos y = \cos(x+y-y) + \cos y = \cos[(x+y)-y] + \cos y$$

$$= \cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y + \cos y$$

$$= \cos y[1+\cos(x+y)] + \sin(x+y)\sin y$$

$$= 2\cos y \cos^2\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\sin y$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\left[\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{2y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{2y}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\left[\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{2y}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

3– ثبوتو چې : $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

دپورته په شان په $\sin x$ کښې د x سره $y-y=0$ جمع کوو، لیکو چې :

$$\sin x - \sin y = \sin[(x+y)-y] - \sin y$$

$$= \sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y - \sin y$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos y - \sin y\left[1 + \cos(x+y)\right]$$

$$= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{2y}{2} - \sin\frac{2y}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x+y}{2}$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\left[\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{2y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{2y}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\left[\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{2y}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y-2y}{2}$$

$$= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

4– ثبوتو چې : $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

دپورته په شان په $\cos x$ کښې د x سره $y-y=0$ جمع کوو، لیکو چې :

$$\cos x - \cos y = \cos(x+y-y) - \cos y$$

$$= \cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y - \cos y$$

$$= -\cos y\left[1 - \cos(x+y)\right] + \sin(x+y)\sin y$$

$$= -2\cos y\sin^2\frac{x+y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\sin y$$

$$= -2\sin\frac{x+y}{2}\left[\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{2y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{2y}{2}\right]$$

$$= -2\sin\frac{x+y}{2}\left[\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{2y}{2}\right)\right]$$

$$= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x+y-2y}{2} = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

5 – ثبوتوو چې : $\sin a\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)\}$

لومړی د $\sin a\cos\beta$ سره $o = \cos a\sin\beta - \cos a\sin\beta$ جمع کوو او په $\frac{2}{2}$

کې ضربوو، یعنې :

$$\sin a\cos\beta = \frac{2\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta - \cos a\sin\beta}{2}$$

$$= \frac{\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta + \sin a\cos\beta - \cos a\sin\beta}{2} = \frac{\sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{\sin(a+\beta) + \sin(a-\beta)\}$$

6 – ثبوتوو چې ، — $\cos a\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(a+\beta) - \sin(a-\beta)\}$

دپورته په شان د $\cos a\sin\beta$ سره $\cos\beta\sin a - \cos\beta\sin a = o$ جمع کوو او $\frac{2}{2}$

کې ضربوو، لیکو چې ،

$$\cos a\sin\beta = \frac{2\cos a\sin\beta + \cos\beta\sin a - \cos\beta\sin a}{2}$$

$$= \frac{\cos a\sin\beta + \cos\beta\sin a + \cos a\sin\beta - \cos\beta\sin a}{2}$$

$$= \frac{\sin a\cos\beta + \cos a\sin\beta - (\sin a\cos\beta - \cos a\sin\beta)}{2}$$

$$= \frac{\sin(a+\beta) - \sin(a-\beta)}{2} = \frac{1}{2}\{\sin(a+\beta) - \sin(a-\beta)\}$$

7 – ثبوتوو چې : $\cos a\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)\}$

دپورته په شان $\cos a\cos\beta$ سره $o = \sin a\sin\beta - \sin a\sin\beta$ جمع او $\frac{2}{2}$ کې

ضربوو :

$$\longrightarrow \cos a\cos\beta = \frac{2\cos a\cos\beta + \sin a\sin\beta - \sin a\sin\beta}{2}$$

$$= \frac{\cos a\cos\beta + \sin a\sin\beta + \cos a\cos\beta - \sin a\sin\beta}{2}$$

$$= \frac{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)}{2} = \frac{1}{2}\{\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)\}$$

8 – ثبوتوچې ، $\quad \sin a \sin\beta = \left\{ \frac{1}{2}\cos(a-\beta) - \frac{1}{2}\cos(a+\beta) \right\}$

دپورته په دول د $\sin a \sin\beta$ سره $\cos a \cos\beta - \cos a \cos\beta = 0$ جمع کوو او په

$\frac{2}{2}$ کښې یې ضربوو :

$$\sin \sin\beta = \frac{2\sin a \sin\beta + \cos a \cos\beta - \cos a \cos\beta}{2}$$

$$= \frac{-\cos a \cos\beta + \sin a \sin\beta + \cos a \cos\beta + \sin a \sin\beta}{2}$$

$$= \frac{-(\cos a \cos\beta - \sin a \sin\beta) + \cos(a-\beta)}{2}$$

$$= \frac{-[\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta)]}{2}$$

$$= \frac{\cos(a-\beta) - \cos(a+\beta)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \cos(a-\beta) - \cos(a+\beta) \right\}$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

د شلورم تمرین حل

لومړی سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\frac{\cos 3X - \cos X}{\cos 3X + \cos X} = -tg\, 2X \cdot tg\, X$$

حل: پوهېږو چې:

$$\cos 3X - \cos X = -2\sin\frac{3X+X}{2}\sin\frac{3X-X}{2}$$

$$= -2\sin\frac{4X}{2}\sin\frac{2X}{2}$$

او همدارنګه

$$\cos 3X + \cos X = 2\cos\frac{3X-X}{2}\cos\frac{3X-X}{2}$$

نو کولای شو چې ولیکو:

$$\frac{\cos 3X - \cos X}{\cos 3X + \cos X} = \frac{-2\sin 2X \sin X}{2\cos 2X \cos X}$$

$$= -\frac{\sin 2X}{\cos 2X}\cdot\frac{\sin X}{\cos X} = -tg\, 2X \cdot tg\, X$$

دوهم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\frac{\sin 5X - \sin 3X}{\sin 5X + \sin 3X} = tg\, X \cdot ctg\, 4X$$

حل: پوهېږو چې

$$\sin 5X - \sin 3X = 2\cos\frac{5X+3X}{2}\sin\frac{5X-3X}{2}$$

او

$$\sin 5X + \sin 3X = 2\sin\frac{5X+3X}{2}\cos\frac{5X-3X}{2}$$

اوس د راکړل شوي مطابقت په کینه خوا کې د دعوی مربوط قیمتونه وضع کوو لیکو چې:

$$\frac{\sin 5X - \sin 3X}{\sin 5X + \sin 3X} = \frac{2\cos\frac{5X+3X}{2}\sin\frac{5X-3X}{2}}{2\sin\frac{5X+3X}{2}\cos\frac{5X-3X}{2}} = \frac{2\cos 4X \cdot \sin X}{2\sin 4X \cdot \cos X}$$

$$= \frac{2}{2}\cdot\frac{\cos 4X}{\sin 4X}\cdot\frac{\sin X}{\cos X} = ctg\, 4X \cdot tg\, X$$

دریم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\frac{\cos 3X - \cos 5X}{\sin 3X + \sin 5X} = tg X$

حل ، د ضرب د فرمولونو څخه د استفادې په صورت کې د راکړل شوی مطابقت کینه خوا داسې لیکلای شو چې :

$$\frac{\cos 3X - \cos 5X}{\sin 3X + \sin 5X} = \frac{-2\sin\frac{3X+5}{2}\sin\frac{3X-5X}{2}}{2\sin\frac{3X+5}{2}\cos\frac{3X-5X}{2}}$$

$$= \frac{-\sin(-X)}{\cos(-X)} = \frac{\sin X}{\cos X} = tg X$$

څلورم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\sin(45+X) - \sin(45-X) = \sqrt{2}\sin X$

حل ، د ضرب د فرمولونو څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$\sin(45+X) - \sin(45-X) = 2\cos\frac{45+X+45-X}{2}\sin\frac{45+X-45+X}{2}$$

$$= 2\cos\frac{90}{2}\sin\frac{2X}{2} = 2\cos 45 \cdot \sin X = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin X$$

$$= \sqrt{2}\sin X$$

پنځم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\cos(45+X) - \cos(45-X) = -\sqrt{2}\sin X$

حل ، د پورته سوال په شان د ضرب د فرمولونو څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$\cos(45+X) - \cos(45-X) = -2\sin\frac{45+X+45-X}{2}\sin\frac{45+X-45+X}{2}$$

$$= -2\sin 45 \sin\frac{2X}{2} = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin X = -\sqrt{2}\sin X$$

شپږم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\sin 5X + \sin 3X = 8\sin X\cos^2 X \cdot \cos 2X$

حل ، د ضرب د فارمولونو په اساس د متوري مطابقت کینه خوا داسې لیکلای شو :

$$\sin 5X + \sin 3X = 2\sin\frac{5X+3X}{2}\cos\frac{5X-3X}{2} = 2\sin\frac{8X}{2}\cos\frac{2X}{2}$$

$$= 2\sin 4X\cos X = 2\cdot 2\sin 2X\cos 2X\cdot\cos X = 4\cdot 2\sin X\cos X\cdot\cos X = 8\sin X\cos^2 X\cos 2X$$

د رادیان له جنسه حساب کړو، نو لیکو چې:

(زاویه د رادیان له جنسه) = $\frac{4223{,}0886\ feet}{3000\ feet}$

$= 1{,}4076962\ Rad$

شپږم سوال: د یو موټر د عرادې قطر 30 inch دی، په صفه صورت سره چې د موټر سرعت $45\ mil/h$ وي عراده په یوه دقیقه کې څو دوره خوري؟

حل: څرنګه چې د عرادې قطر په انچ راکړل شوی، نو راکړل شوې فاصله هم په انچ حسابوو، یعنې:

$45\ mil = 45 \cdot 1609 \cdot 39{,}37\ inch$

$= 2850584{,}8\ inch$

نو د نوموړي موټر سرعت عبارت دی له:

د موټر سرعت = $\frac{2850584{,}8\ inch}{60\ min}$

$= 47509{,}476\ inch/min$

څرنګه چې د موټر د ټایر قطر ۳۰ inch دی نو شعاع یې 15 inch ده، او همدا رنګه د نوموړي ټایر محیط $2\pi r$ دی نو لیکو چې

د ټایر محیط = $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 15\ inch$

$= \frac{660}{7}\ inch = 94{,}3\ inch$

اوس نو یو تناسب جوړوو چې د تناسب جوړونکي اجزاء دور او inch وي

یعنې: یو دور = $94{,}3\ inch$

$47509{,}8\ inch = X \Longrightarrow X = \frac{47509{,}8\ inch}{94{,}3\ inch} = 504$ تقریباً دور

اوومړ سوال، ثبوت کړئ چې: $\frac{\cos 2A+\cos A+1}{\sin 2A+\sin A}=\cot A$

حل، پوهېږو چې $1+\cos 2A=2\cos^2 A$ او $\sin 2A=2\sin A\cos A$ اوس د مطابقت په کینه خواکې د هغوی مربوط قیمتونه وضع کوو، لیکو چې،

$$\frac{\cos 2A+\cos A+1}{2\sin A+\sin A}=\frac{\cos A+1+\cos 2A}{\sin A+\sin 2A}=\frac{\cos A+2\cos^2 A}{\sin A+2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\cos A(1+2\cos A)}{\sin A(1+2\cos A)}=\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$$

اتم سوال، ثبوت کړئ چې: $\frac{\sin A+\cos 2A-1}{\cos A-\sin 2A}=\tan A$

حل، څرنګه چې $\cos 2A-1=-(1-\cos 2A)=-2\sin^2 A$ او $\sin 2A=2\sin A\cos A$

نو لیکلای شو چې،

$$\frac{\sin A+\cos 2A-1}{\cos A-\sin 2A}=\frac{\sin A-(1-\cos 2A)}{\cos A-2\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\sin A-2\sin^2 A}{\cos A-2\sin A\cos A}=\frac{\sin A(1-2\sin A)}{\cos A(1-2\sin A)}=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$$

نهم سوال، ثبوت کړئ چې،

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$$

حل: پوهېږو چې: $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ او $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$، اوس

د مطابقت په چپ طرف کې د هغوی مربوط قیمتونه وضع کوو، لیکو چې،

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

لسم سوال: ثبوت کړئ چې: $\frac{\tan 3\theta+\tan 5\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}=4\cos 2\theta\cos 4\theta$

حل: د مطابقت کیڼې لوري ته انکشاف ورکوو، لیکو چې،

$$\frac{\tan 3\theta+\tan 5\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}=\frac{\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}+\frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta}}{\frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta}-\frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos 5\theta \sin 3\theta + \cos 3\theta \sin 5\theta}{\cos 3\theta \cos 5\theta}}{\dfrac{\sin 5\theta \cos 3\theta - \sin 3\theta \cos 5\theta}{\cos 5\theta \cos 3\theta}} = \frac{\sin(5\theta+3\theta)}{\sin(5\theta-3\theta)} = \frac{\sin 8\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{2\sin 4\theta \cos 4\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\cdot 2\sin 2\theta \cos 2\theta \cos 4\theta}{\sin 2\theta} = 4\cos 2\theta \cos 4\theta$$

یوولسم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\sin 3A + \sin 2A - \sin A = 4\sin A \cos \frac{A}{2} \cos \frac{3A}{2}$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه استفاده کوو او د نومورې مطابقت چپه خوا دا رنګه لیکلای شو :

$$\sin 3A + \sin 2A - \sin A = \sin 3A - \sin A + \sin 2A$$

$$= 2\cos\frac{3A+A}{2}\sin\frac{3A-A}{2} + 2\sin A\cos A = 2\cos 2A \sin A + 2\sin A \cos A$$

$$= 2\sin A(\cos 2A + \cos A) = 2\sin A \cdot 2\cos\frac{2A+A}{2}\cos\frac{2A-A}{2}$$

$$= 2\sin A \cdot 2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4\sin A\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

دولسم سوال ، ثبوت کړئ چې : $\dfrac{\sin(n+1)A - \sin(n-1)A}{\cos(n+1)A + 2\cos nA + \cos(n-1)A} = tg\, A/2$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې د نومورې مطابقت چپه خوا دا رنګه لیکلای شو :

$$\frac{\sin(n+1)A - \sin(n-1)A}{\cos(n+1)A + \cos(n-1)A + 2\cos nA} = \frac{2\cos\frac{(n+1+n-1)A}{2}\sin\frac{(n+1-n+1)A}{2}}{2\cos\frac{(n+1+n-1)A}{2}\cos\frac{(n+1-n+1)A}{2} + 2\cos nA}$$

$$= \frac{2\cos nA \sin nA}{2\cos nA\cos A + 2\cos nA} = \frac{2\cos nA \cdot \sin nA}{2\cos nA(1+\cos A)} = \frac{2\sin A/2 \cos A/2}{2\cos^2 A/2}$$

$$= \frac{\sin A/2}{\cos A/2} = tg\, A/2$$

دیارلسم سوال ، ثبوت کړئ چې :

$$\frac{\sin(n+1)A + 2\sin(nA) + \sin(n-1)A}{\cos(n-1)A - \cos(n+1)A} = ctg\, A/2$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$\frac{\sin(n+1)A+\sin(n-1)A+2\sin(nA)}{\cos(n-1)-\cos(n+1)A}=\frac{2\sin\frac{(n+1+n-1)A}{2}\cos\frac{(n+1-n+1)A}{2}+2\sin(nA)}{-2\sin\frac{(n-1+n+1)A}{2}\sin\frac{(n-1-n-1)A}{2}}$$

$$=\frac{2\sin(nA)\cos A+2\sin(nA)}{-2\sin(nA)\sin(-A)}=\frac{2\sin(nA)\left[1+\cos A\right]}{2\sin(nA)\sin A}=\frac{2\cos^2 A/2}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos A/2}{\sin A/2}=\operatorname{ctg} A/2$$

څوارلسم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$(\cos a+\cos\beta)^2+(\sin a-\sin\beta)^2=4\cos^2\frac{a+\beta}{2}$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه استفاده کوو او د $\sin a-\sin\beta$ او $\cos a+\cos\beta$ قیمتونه لیکو . یعنې :

$$(\cos a+\cos\beta)^2+(\sin a-\sin\beta)^2=\left(2\cos\frac{a+\beta}{2}\cos\frac{a-\beta}{2}\right)^2+\left(2\cos\frac{a+\beta}{2}\sin\frac{a-\beta}{2}\right)^2$$

$$=4\cos^2\frac{a+\beta}{2}\cos^2\frac{a-\beta}{2}+4\cos^2\frac{a+\beta}{2}\sin^2\frac{a-\beta}{2}$$

$$=4\cos^2\frac{a+\beta}{2}\left[\underbrace{\cos^2\frac{a-\beta}{2}+\sin^2\frac{a-\beta}{2}}\right]$$

$$=4\cos^2\frac{a+\beta}{2}\cdot 1=4\cos^2\frac{a+\beta}{2}$$

پنځلسم سوال : ثبوت کړئ چې:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2(45-a)}{1-\operatorname{tg}^2(45-a)}=\operatorname{cosec} 2a$$

حل : پوهېږو چې $1+\operatorname{tg}^2(45-a)=\frac{1}{\cos^2(45-a)}$ او $1-\operatorname{tg}^2(45-a)=1-\frac{\sin^2(45-a)}{\cos^2(45-a)}$

$$=\frac{\cos^2(45-a)-\sin^2(45-a)}{\cos^2(45-a)}=\sec^2(45-a)\cdot\cos(90-2a)$$

د دواړو مطابقت په کینه خوا کې د دعوی مربوط قیمتونه وضع کوو، لیکو:

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2(45-a)}{1-\operatorname{tg}^2(45-a)}=\frac{\sec^2(45-a)}{\sec^2(45-a)\cdot\cos(90-2a)}$$

$$=\frac{1}{\sin 2a}=\operatorname{cosec} 2a$$

شپاړسم سوال : ثبوت کړئ چي ، $\cos^2 a + \cos^2(a+60) + \cos^2(a-60) = 3/2$

حل : دمطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو لیکوچي :

$$\cos^2 a + \cos^2(a+60) + \cos^2(a-60) = \cos^2 a + (\cos a \cos 60 - \sin a \sin 60)^2 + (\cos a \cos 60 + \sin a \sin 60)^2$$

$$= \cos^2 a + \left(\frac{\cos a}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos a}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right)^2$$

$$= \cos^2 a + \left[\frac{\cos a}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin a}{2} + \frac{\cos a}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right]^2 - 2\left(\frac{\cos a}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right)\left(\frac{\cos a}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin a}{2}\right)$$

$$= \cos^2 a + \left(2\frac{\cos a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\cos^2 a}{4} - \frac{3\sin^2 a}{4}\right)$$

$$= 2\cos^2 a - \frac{2}{2}\left(\frac{\cos^2 a - 3\sin^2 a}{2}\right) = 2\cos^2 a - \frac{1}{2}\cos^2 a + \frac{3\sin^2 a}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\cos^2 a + \frac{3}{2}\sin^2 a = \frac{3}{2}(\cos^2 a + \sin^2 a) = \frac{3}{2}$$

اووه لسم سوال : ثبوت کړئ چي :

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = tg(A-B)$$

حل: د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې د مطابقت کینه خوا داسې لیکوچي :

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \frac{-2\sin\frac{2B+2A}{2}\sin\frac{2B-2A}{2}}{2\sin\frac{2B+2A}{2}\cos\frac{2B-2A}{2}}$$

$$= \frac{-2\sin(B+A)\sin(B-A)}{2\sin(B+A)\cos(B-A)} = \frac{2\sin(A-B)}{2\cos(A-B)} = tg(A-B)$$

اتلسم سوال: ثبوت کړئ چي ، $\frac{\sin A + \sin 2A}{\cos A - \cos 2A} = Ctg\, A/2$

حل: د ضرب د فارمولونو په اساس لیکلای شوچي ،

$$\frac{\sin A + \sin 2A}{\cos A - \cos 2A} = \frac{2\sin\frac{2A+A}{2}\cos\frac{2A-A}{2}}{2\sin\frac{2A+A}{2}\sin\frac{2A-A}{2}} = \frac{\cos A/2}{\sin A/2} = Ctg\, A/2$$

نولسم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a = 4\cos a \cos 2a \cos 5a$$

حل : د ضرب د فارمولونو په اساس لیکلای شو چې :

$$\cos 2a + \cos 6a + \cos 4a + \cos 8a = 2\cos\frac{2a+6a}{2}\cos\frac{6a-2a}{2} + 2\cos\frac{8a+4a}{2}\cos\frac{8a-4a}{2}$$

$$= 2\cos 4a \cos 2a + 2\cos 6a \cos 2a = 2\cos 2a(\cos 4a + \cos 6a)$$

$$= 2\cos 2a \cdot 2\cos\frac{6a+4a}{2}\cos\frac{6a-4a}{2}$$

$$= 2\cos 2a \cdot 2\cos 5a \cdot \cos a = 4\cos a \cos 2a \cos 5a$$

شلم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\frac{\sin(4a-2B)+\sin(4B-2a)}{\cos(4a-2B)+\cos(4B-2a)} = \operatorname{tg}(a+B)$$

حل : د ضرب د فارمولونو په اساس لیکو چې :

$$\frac{\sin(4a-2B)+\sin(4B-2a)}{\cos(4a-2B)+\cos(4B-2a)} = \frac{2\sin\frac{4a-2B+4B-2a}{2}\cos\frac{4a-2B-4B+2a}{2}}{2\cos\frac{4a-2B+4B-2a}{2}\cos\frac{4a-2B-4B+2a}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{2a+2B}{2}}{\cos\frac{2a+2B}{2}} = \operatorname{tg}(A+B)$$

یو ویشتم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\frac{\cos 3a + 2\cos 5a + \cos 7a}{\cos a + 2\cos 3a + \cos 5a} = \cos 5a \sec 3a$$

حل : د ضرب د فارمولونو په اساس لیکلای شو چې :

$$\frac{\cos 3a + \cos 7a + 2\cos 5a}{\cos 5a + \cos a + 2\cos 3a} = \frac{2\cos\frac{3a+7a}{2}\cos\frac{3a-7a}{2} + 2\cos 5a}{2\cos\frac{5a+a}{2}\cos\frac{5a+a}{2} + 2\cos 3a}$$

$$= \frac{2\cos 5a\cos(-2a) + 2\cos 5a}{2\cos 3a\cos 2a + 2\cos 3a} = \frac{2\cos 5a(1+\cos 2a)}{2\cos 3a(1+\cos 2a)}$$

$$= \cos 5a \cdot \frac{1}{\cos 3a} = \cos 5a \sec 3a$$

دوه ویشتم سوال، ثبوت کړئ چې :

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)-2\sin\theta+\sin(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)-2\cos\theta+\cos(\theta-\varphi)}=tg\,\theta$$

حل : د ضرب د فارمولونو په اساس د موضوعي مطابقت چپ لوري داسې ليکو چې :

$$\frac{\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)-2\sin\theta}{\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)-2\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta+\varphi+\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi-\theta+\varphi}{2}-2\sin\theta}{2\cos\frac{\theta+\varphi+\theta-\varphi}{2}\cos\frac{\theta+\varphi-\theta+\varphi}{2}-2\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\varphi-2\sin\theta}{2\cos\theta\cos\varphi-2\cos\theta}=\frac{2\sin\theta(\cos\varphi-1)}{2\cos\theta(\cos\varphi-1)}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=tg\,\theta$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

د پنځم تمرین حل

که A ، B او C دیوه مثلث داخلي زاویې وي.

لومړی سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{2C}{2}$$

څرنګه چې $A+B=180-C$ نو

$$=2\sin\left(\frac{180-C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\sin\left(90-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]$$

ځکه چې : $\frac{C}{2}=\frac{180-(A+B)}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{\frac{A-B+A+B}{2}}{2}\cdot\cos\left(\frac{A-B-A-B}{2}\right)/2\right.$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)=2\cos\frac{C}{2}\cdot2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$$

دویم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin A - \sin B + \sin C$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کښې لیکلای شو چې :

$$4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{B}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{A-C}{2}\right) - \cos \left(\frac{A+C}{2}\right) \right\} \cdot 2 \cos \frac{B}{2}$$

ځکه چې $A+C=180-B$

$$= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} \cos \left(90 - \frac{B}{2}\right)$$

$$= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} - 2 \cos \frac{B}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} - \sin 2 \cdot \frac{B}{2} = 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} - \sin B$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \left(\frac{B}{2} + \frac{A-C}{2}\right) + \cos \left(\frac{B}{2} - \frac{A-C}{2}\right) \right\} - \sin B$$

$$= \cos \frac{A+B-C}{2} + \cos \frac{B-A+C}{2} - \sin B$$

$$= \cos \frac{180-C-C}{2} + \cos \frac{B+C-A}{2} - \sin B$$

$$= \cos \frac{180-2C}{2} + \cos \frac{180-2A}{2} - \sin B$$

$$= \cos (90-C) + \cos (90-A) - \sin B$$

$$= \sin C + \sin A - \sin B$$

دریم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

حل: د ضرب د فارمولونو په اساس د نومړې مطابقت چپ اړخ په لاندې ډول لیکو:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{2C}{2}$$

ځکه چې $A+B=180-C$ نو: $\cos A+\cos B+\cos C = 2 \cos \frac{180-C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{180-(A+B)}{2}\right) + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left(90 - \frac{A+B}{2}\right)\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right] + 1 \qquad \boxed{\cos(90-\alpha)=\sin\alpha \text{ ځکه چې}}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{\frac{A-B+A+B}{2}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{A-B-A-B}{2}}{2}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{-B}{2}\right] + 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

څلورم سوال: ثبوت کړئ چې :

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1 = \cos A + \cos B - \cos C$$

حل: دضرب دفارمولونو څخه داستفادې په صورت کې لیکلای شو چې :

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 1 = 2\sin\frac{C}{2} \cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right\} - 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot \left\{\cos\frac{180-C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right\} - 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot \left\{\cos\left(90 - \frac{C}{2}\right) + \cos\frac{A-B}{2}\right\} - 1$$

$$= 2\sin\frac{C}{2} \cdot \left\{\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\right\} - \sin^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} - \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= -\left(\cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2}\left\{\sin\frac{A+C-B}{2} + \sin\frac{B+C-A}{2}\right\}$$

$$= -\cos 2 \cdot \frac{C}{2} + \left\{\sin\frac{180-2B}{2} + \sin\frac{180-2A}{2}\right\}$$

$$= -\cos C + \sin(90-B) + \sin(90-A)$$

$$= -\cos C + \cos B + \cos A$$

$$= \cos A + \cos B - \cos C$$

پنځم سوال: ثبوت کړئ چې: $tg A + tg B + tg C = tg A . tg B . tg C$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکلای شو چې:

$$tg A + tg B + tg C = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin(A+B)\cos C + \cos A \cos B \sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\cos C + \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}\sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin[180-C]\cos C + \frac{1}{2}\{\cos[180-C] + \cos(A-B)\}\sin C}{\cos A \cos B \cos C}$$

$$= \frac{\sin C \cos C + \frac{1}{2}\{-\cos C + \cos(A-B)\}\sin C}{\cos C \cos B \cos A}$$

$$= \frac{\sin C}{\cos C} \cdot \frac{\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos C}{\cos B \cos A}$$

$$= tg C \cdot \frac{\frac{1}{2}\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B)}{\cos B \cos A}$$

$$= tg C \cdot \frac{\frac{1}{2}\{2\cos\frac{C+A-B}{2} \cdot \cos\frac{C-A+B}{2}}{\cos B \cos A}$$

$$= tg C \cdot \frac{\cos\frac{180-2B}{2} \cdot \cos\frac{180-2A}{2}}{\cos B \cos A}$$

$$= tg C \cdot \frac{\cos(90-B) \cdot \cos(90-A)}{\cos B \cos A} = tg C \cdot \frac{\sin B \cdot \sin A}{\cos B \cos A}$$

$$= tg C \cdot \frac{\sin B}{\cos B} \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = tg C . tg B . tg A$$

شپږم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\cot g A/2 + \cot g B/2 + \cot g C/2 = \cot g A/2 . \cot g B/2 . \cot g C/2$$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ ته انکشاف ورکوو، لیکو چې:

$$\cot g A/2 + \cot g B/2 + \cot g C/2 = \frac{\cos A/2}{\sin A/2} + \frac{\cos B/2}{\sin B/2} + \cot g C/2$$

$$= \frac{\cos A/2 \sin B/2 + \cos B/2 \sin A/2}{\sin A/2 \sin B/2} + \cot g C/2 = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin A/2 \sin B/2} + \frac{\cos C/2}{\sin C/2}$$

نو معلومه شوه چې د نوموړي موټر ټائر په یوه دقیقه کې تقریباً 504 دوره خوري .

دیوولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونو دویم تمرین حل

لومړی سوال : ثبوت کړئ چې : $(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2=2$

حل : د ورکړل شوي مطابقت چپ اړخ د a^2+b^2 شکل لري. څرنګه چې: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ، نو لیکلای شو چې :

$$(\cos A+\sin A)^2+(\cos A-\sin A)^2=(\cos A+\sin A+\cos A-\sin A)^2-2(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)=(2\cos A)^2-2(\cos^2A-\sin^2A)=$$

$$4\cos^2A-2\cos^2A+2\sin^2A=2\cos^2A+2\sin^2A=2(\cos^2A+\sin^2A)$$

$$=2\cdot 1=2$$

دویم سوال : ثبوت کړئ چې: $\cos^4A-\sin^4A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$

حل : د ورکړل شوي مطابقت چپ اړخ د a^4-b^4 شکل لري، څرنګه چې: $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ نو لیکلای شو چې :

$$\cos^4A-\sin^4A=(\cos^2A-\sin^2A)(\cos^2A+\sin^2A)=[\cos^2A-(1-\cos^2A)]\cdot 1$$

$$=\cos^2A-1+\cos^2A=2\cos^2A-1$$

$$=2(1-\sin^2A)-1=2-2\sin^2A-1=1-2\sin^2A$$

$$= \frac{\sin C/2 \sin \frac{A+B}{2} + \sin A/2 \sin B/2 \cos C/2}{\sin C/2 \ \sin B/2 \ \sin A/2}$$

$$= \frac{\sin \frac{180-(A+B)}{2} \cdot \sin \frac{180-C}{2} + \frac{1}{2}\left\{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right\} \cos C/2}{\sin C/2 \ \sin B/2 \ \sin A/2}$$

$$= \frac{\sin\left(90 - \frac{A+B}{2}\right) \ \sin\left(90 - \frac{C}{2}\right) + 1/2 \left\{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right\} \cos C/2}{\sin C/2 \ \sin B/2 \ \sin A/2}$$

$$= \frac{\cos \frac{A+B}{2} \cos C/2 + \cos C/2 \cdot \frac{1}{2}\left\{\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right\}}{\sin C/2 \ \sin B/2 \ \sin A/2}$$

$$= \frac{\cos C/2}{\sin C/2} \cdot \frac{\cos \frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{A+B}{2}}{\sin B/2 \ \sin A/2}$$

$$= \operatorname{Cotg} C/2 \cdot \frac{1/2\left\{\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}\right\}}{\sin B/2 \ \sin A/2} = \operatorname{Cotg} C/2 \cdot \frac{1/2 \cdot 2 \cos A/2 \cos B/2}{\sin A/2 \ \sin B/2}$$

$$= \operatorname{Cotg} C/2 \cdot \operatorname{Cotg} A/2 \cdot \operatorname{Cotg} B/2$$

اوم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \ \sin B \ \sin C$$

حل، د ضرب د فارمولونو په اساس د نوموړي مطابقت چپ اړخ دا رنګه لیکلای شو چې:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin \frac{2A+2B}{2} \cos \frac{2A-2B}{2} + 2 \sin 2C/2 \ \cos 2C/2$$

$$= 2 \sin (A+B) \cos (A-B) + 2 \sin 2C/2 \ \cos 2C/2$$

$$= 2 \sin (180-C) \ \cos (A-B) + 2 \sin C \ \cos C$$

$$= 2\left[\sin C \ \cos (A-B) + \sin C \ \cos C\right] = 2 \sin C \left[\cos (A-B) + \cos C\right]$$

$$= 2 \sin C \left[2 \cos \frac{A-B+C}{2} \ \cos \frac{A-B-C}{2}\right]$$

$$= 4 \sin C \left[\cos \frac{180-2B}{2} \cos \frac{A-(B+C)}{2}\right]$$

$$= 4 \sin C \cdot \left[\cos (90-B) \cos \frac{A-(180-A)}{2}\right]$$

$$= 4\sin C \sin B \cos\frac{2A-180}{2} = 4\sin C \sin B \cos(90-A)$$

$$= 4\sin C \sin B \sin A$$

اتم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A \cos B \cos C$$

حل : د ضرب د فارمولونو څخه د استفادې په صورت کښې لیکلای شو چې :

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2\cos\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2} + \cos^2 C - \sin^2 C$$

$$= \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C - (1-\cos^2 C)$$

$$= 2\cos(180-C)\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1 = -2\cos C[\cos(A-B) - \cos C] - 1$$

$$= -2\cos C \cdot -2\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{A-(B+C)}{2} - 1$$

$$= 4\cos C \sin\frac{180-2B}{2}\sin\frac{A-(180-A)}{2} - 1$$

$$= 4\cos C \sin(90-B)\sin(A-90) - 1$$

$$= 4\cos C \cos B \sin[-(90-A)] - 1 = -4\cos C \cos B \sin(90-A) - 1$$

$$= -1 - 4\cos C \cos B \cos A$$

نهم سوال : ثبوت کړئ چې :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

حل : د $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ د مطابقت په مرسته لیکلای شو چې :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = (\cos A + \cos B)^2 - 2\cos A \cos B + \cos^2 C$$

$$= \left[2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right] - 2\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\right\} + \cos^2 C$$

$$= 4\cos^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) - \cos 2\cdot\frac{A-B}{2} + \cos^2 C$$

$$= 4\cos^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) - \cos^2\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{A-B}{2} + \cos^2 C$$

$$= 4\cos^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \cos^2\frac{A-B}{2} + 1 - \cos^2\frac{A-B}{2} + \cos^2 C - \cos(A+B)$$

$$= 2\cos^2\frac{A-B}{2}\left[2\cos^2\frac{A+B}{2} - 1\right] + 1 - \cos(A+B) + \cos^2 C$$

$$= 2\cos^2\frac{A-B}{2}\left[\cos^2\frac{A+B}{2} - \left(1-\cos^2\frac{A+B}{2}\right)\right] + 1 - \cos(A+B) + \cos^2 C$$

$$= 2\cos^2\frac{A-B}{2}\left[\cos^2\frac{A+B}{2} - \sin^2\frac{A+B}{2}\right] - \cos(A+B) + 1 + \cos^2 C$$

$$= 2\cos^2\frac{A-B}{2}\cos(A+B) - \cos(A+B) + 1 + \cos^2 C$$

$$= \cos(A+B)\left[2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right] + 1 + \cos^2 C$$

$$= \cos(A+B)\left[\cos^2\frac{A-B}{2} - \left(1-\cos^2\frac{A-B}{2}\right)\right] + 1 + \cos^2 C$$

$$= \cos(A+B)\left[\cos^2\frac{A-B}{2} - \sin^2\frac{A-B}{2}\right] + 1 + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(A+B)\left[\cos(A-B)\right] + \cos^2 C$$

$$= 1 + \cos(180 - C)\cos(A-B) + \cos^2 C$$

$$= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C\left[+\cos(A-B) - \cos C\right]$$

$$= 1 - \cos C\left[2\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\right]$$

$$= 1 - 2\cos C\left[\sin\frac{180-2B}{2}\sin\frac{180-2A}{2}\right]$$

$$= 1 - 2\cos C\left[\sin(90-B)\sin(90-A)\right]$$

$$= 1 - 2\cos C\cos B\cos C$$

لسم سوال ثبوت کړئ چې:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

حل: د $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ په مرسته لیکلای شو چې:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = (\sin A + \sin B)^2 + \sin^2 C - 2\sin A\sin B$$

$$= \left[2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right]^2 + \sin^2 C - 2\sin A\sin B$$

$$= 4\sin^2\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\left\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\right\} + \sin^2 C$$

$$= 4\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - \cos(A-B) + \cos^2\frac{A+B}{2} - \sin^2\frac{A+B}{2} + \sin^2 C$$

$$= 4\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{A+B}{2} - \cos(A-B) + \sin^2 C$$

$$= 4\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{A+B}{2} + 1 + 1 - 1 + \sin^2 C - \cos(A-B)$$

$$= 2\sin^2\frac{A+B}{2}\left[2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1\right] + 2 - (1 - \sin^2 C) - \cos(A-B)$$

$$= 2\sin^2\frac{A+B}{2}\left[\cos^2\frac{A-B}{2} - \sin^2\frac{A-B}{2}\right] + 2 - \cos^2 C - \cos(A-B)$$

$$= 2\sin^2\frac{A+B}{2}\cos(A-B) - \cos(A-B) + 2 - \cos^2 C$$

$$= \cos(A-B)\left[2\sin^2\frac{A+B}{2} - 1\right] + 2 - \cos^2 C$$

$$= \cos(A-B)\left[\sin^2\frac{A+B}{2} - \left(1 - \sin^2\frac{A+B}{2}\right)\right] + 2 - \cos^2 C$$

$$= \cos(A-B)\left[\sin^2\frac{A+B}{2} - \cos^2\frac{A+B}{2}\right] + 2 - \cos^2 C$$

$$= \cos(A-B)\left[-\cos(A+B)\right] - \cos^2 C + 2$$

$$= 2 + \cos(A-B)\left[-\cos(180 - C)\right] - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos(A-B)\left[+\cos C\right] - \cos^2 C$$

$$= 2 + \cos C\left[\cos(A-B) - \cos C\right]$$

$$= 2 + \cos C\left[-2\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{A-(B+C)}{2}\right]$$

$$= 2 + \cos C\left[+2\sin\frac{180-2B}{2}\sin\frac{B+C-A}{2}\right]$$

$$= 2 + \cos C\left[2\sin(90 - B)\sin\frac{180-2A}{2}\right]$$

$$= 2 + \cos C\left[2\cos B\cos A\right]$$

$$= 2 + 2\cos C\cos B\cos A$$

یوولسم سوال : په هغه صورت کې چې $\alpha/2$ ، $\beta/2$ او $\theta/2$ زاویې حاده او

$\alpha + \beta + \theta = 180$ نو ثبوت کړئ چې :

$$\tg\frac{\alpha}{2}\tg\frac{\beta}{2} + \tg\frac{\alpha}{2}\tg\frac{\theta}{2} + \tg\frac{\beta}{2}\tg\frac{\theta}{2} = 1$$

حل : دنو موری مطابقت چپ اړخ داسې لیکو :

$$tg\frac{a}{2}\,tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{a}{2}\,tg\frac{\theta}{2}+tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\theta}{2}=\frac{1}{Catg\frac{\theta}{2}\,Catg\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{Catg\frac{a}{2}\,Catg\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{Catg\frac{\beta}{2}\,Catg\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{Catg\frac{\theta}{2}+Catg\frac{\beta}{2}+Catg\frac{a}{2}}{Catg\frac{a}{2}\,Catg\frac{\beta}{2}\,Catg\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{Cos\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{\theta}{2}}+\frac{Cos\frac{\beta}{2}}{Sin\frac{\beta}{2}}+Catg\frac{a}{2}}{Catg\frac{a}{2}\,Catg\frac{\beta}{2}\,Catg\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{Sin\frac{\beta}{2}Cos\frac{\theta}{2}+Cos\frac{\beta}{2}Sin\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}}+Catg\frac{a}{2}}{Catg\frac{a}{2}\,Catg\frac{\beta}{2}\,Catg\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{Sin\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right)}{Sin\frac{\theta}{2}\,Sin\frac{\beta}{2}}+Catg\frac{a}{2}}{\frac{Cos\frac{a}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{a}{2}\,Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}}}=\frac{\frac{Sin\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right)}{Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}}+\frac{Cos\frac{a}{2}}{Sin\frac{a}{2}}}{\frac{Cos\frac{a}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{a}{2}\,Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{Sin\frac{a}{2}\,Sin\left(\frac{\beta+\theta}{2}\right)+Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}\,Cos\frac{a}{2}}{Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}\,Sin\frac{a}{2}}}{\frac{Cos\frac{a}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}{Sin\frac{a}{2}\,Sin\frac{\beta}{2}\,Sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{Sin\frac{a}{2}\,Sin\frac{180-a}{2}+\frac{1}{2}\left\{Cos\frac{\theta-\beta}{2}-Cos\frac{\theta+\beta}{2}\right\}Cos\frac{a}{2}}{Cos\frac{a}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{Sin\frac{a}{2}\,Cos\frac{a}{2}+Cos\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{Cos\frac{\theta-\beta}{2}-Cos\frac{\theta+\beta}{2}\right\}}{Cos\frac{a}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{Cos\frac{a}{2}}{Cos\frac{a}{2}}\cdot\frac{Sin\frac{180-(\beta+\theta)}{2}+\frac{1}{2}Cos\frac{\theta-\beta}{2}-Cos\frac{\theta+\beta}{2}\cdot\frac{1}{2}}{Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=1\cdot\frac{Cos\frac{\beta+\theta}{2}-\frac{1}{2}Cos\frac{\beta+\theta}{2}+\frac{1}{2}Cos\frac{\theta-\beta}{2}}{Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{Cos\frac{\beta+\theta}{2}+Cos\frac{\beta-\theta}{2}\right\}}{Cos\frac{\beta}{2}\,Cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\beta+\theta+\beta-\theta}{4}\cdot\cos\frac{\beta+\theta-\beta+\theta}{4}}{\cos\beta/_2\ \cos A/_2} = \frac{\cos 2\frac{2\beta}{4}\cos\frac{2\theta}{4}}{\cos\beta/_2\ \cos A/_2}$$

$$= \frac{\cos\beta/_2\ \cos A/_2}{\cos\beta/_2\ \cos A/_2} = 1$$

دولسم سوال : که a ، β او θ حادې زاويې وي او $a+\beta+\theta=180^\circ$

مثبوت کړئ چې : $\operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\beta + \operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\theta + \operatorname{Cotg}\beta \operatorname{Cotg}\theta = 1$

حل: د $\operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\beta = \frac{1}{tg\, a\, tg\beta}$ ، $\operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\theta = \frac{1}{tg\, a\, tg\theta}$ او $\operatorname{Cotg}\beta\operatorname{Cotg}\theta = \frac{1}{tg\beta\, tg\theta}$

ليکو بيعني : $\operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\beta + \operatorname{Cotg} a \operatorname{Cotg}\theta + \operatorname{Cotg}\beta\operatorname{Cotg}\theta = \frac{1}{tg\,a\,tg\beta} + \frac{1}{tg\,a\,tg\theta} + \frac{1}{tg\beta\,tg\theta}$

$$= \frac{tg\theta + tg\beta + tg\,a}{tg\,a\,tg\beta\,tg\theta} = \frac{\frac{\sin(\beta+\theta)}{\cos\beta\cos\theta} + \frac{\sin a}{\cos a}}{tg\,a\,tg\beta\cdot tg\theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin(\beta+\theta)\cos a + \cos\beta\cos\theta\sin a}{\cos\beta\cos A\cos\theta}}{\frac{\sin a\sin\beta\sin\theta}{\cos\beta\cos\theta\cos a}} = \frac{\sin(\beta+\theta)\cos a + \cos\theta\sin a\cos\beta}{\sin a\sin\beta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - a)\cos a + \frac{1}{2}\{\cos(\beta+\theta) + \cos(\beta-\theta)\}\sin a}{\sin a\sin\beta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin a\cos a + \frac{1}{2}\{\cos(\beta+\theta) + \cos(\beta-\theta)\}\sin a}{\sin a\sin\beta\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin a}\cdot\frac{+\cos[180^\circ - (\beta+\theta)] + \frac{1}{2}\cos(\beta+\theta) + \frac{1}{2}\cos(\beta-\theta)}{\sin\beta\sin\theta}$$

$$= 1\cdot\frac{-\cos(\beta+\theta) + \frac{1}{2}\cos(\beta+\theta) + \frac{1}{2}\cos(\beta-\theta)}{\sin\beta\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\theta) - \cos(\beta+\theta)\}}{\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\theta) - \cos(\beta+\theta)\}} = 1$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

شپږم تمرین

مثلثاتي معادلې

لومړی سوال: لاندې معادله حل کړئ، $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

حل: لومړی د معادلې د حل د امکان شرط ګورو:

ددې لپاره چې نوموړې معادله حل ولري باید $\sqrt{2}$ د $\sin\theta$ او $\cos\theta$

د ضریبونو د مربع ګانو د مجموعې څخه وړوکی یا ورسره مساوي وي، یعنې:

$$(\sqrt{2})^2 \leq (1)^2 + (1)^2$$

$$2 = 2$$

پس راکړل شوې معادله حل لري او حل کوو یې.

لیدل کیږي چې د $\cos\theta$ ضریب $1 = tg\frac{\pi}{4}$ دی او س نو د (۱) پر ځای په

معادله کې ($tg(\frac{\pi}{4})$ وضع کوو، یعنې: $\sin\theta + tg\frac{\pi}{4}\cos\theta = \sqrt{2}$

$$\sin\theta + \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}\cos\theta = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sin\theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos\theta \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

پس تولې هغه زاویې چې دپورتنۍ معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$\frac{\pi}{4} + \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$ یا $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

دوهم سوال، دلاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ .

$$\sqrt{3} \cos X + \sin X = \sqrt{2}$$

حل، لیدل کیږي چې د $\cos X$ ضریب $\sqrt{3} = tg \frac{\pi}{3}$ نوپه نوموړې معادله کې د $\sqrt{3}$ په ځای $tg \frac{\pi}{3}$ وضع کوو ، لیکو چې : $\sin X + tg \frac{\pi}{3} \cos X = \sqrt{2}$

$$\sin X + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cos X = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{\sin X \cos \frac{\pi}{3} + \cos X \sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow x + \frac{\pi}{3} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots \Longrightarrow X = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

پس X تولې هغه زاویې دي چې راکړل معادله تصدیقوي .

دریم سوال : لاندې معادله حل کړئ :

$$2 \sin X + \cos X = 2$$

په راکړل شوې معادله کې د $\sin X$ او $\cos X$ قیمتونه د $tg X$ له جنسه وضع کوو ، لیکو چې :

$$\frac{4\, tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} - 2 = 0$$

$$4\, tg \frac{x}{2} + 1 - tg^2 \frac{x}{2} - 2\, tg^2 \frac{x}{2} - 2 = 0 \quad \cdots \left(1 + tg^2 \frac{x}{2} \neq 0 \text{ ده}\right)$$

$$3\, tg^2 \frac{x}{2} - 4\, tg \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$(tg\,x/2 - 1)\,(3\,tg\,x/2 - 1) = 0$$

$\Longrightarrow tg\,x/2 = 1 \;\ldots\; I$ یا $tg\,x/2 = 0{,}3333 \;\ldots\; II$

د I معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې یو دی $\pi/4$ ده، او د II معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې $0{,}3333$ دی د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه $18^\circ\,26'$ په لاس راوړو. نو هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$x/2 = n\pi + \pi/4$ یا $x = 2n\pi + \pi/2$

او $x/2 = n\cdot 180^\circ + 18^\circ\,26'$ یا $x = 2n\cdot 180^\circ + 36^\circ\,52'$

څلورم سوال: لاندې معادله حل کړئ:

$$\sqrt{3}\,\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

حل: څرنګه چې $(\sqrt{2})^2 < (\sqrt{3})^2 + (-1)^2$ نو معادله حل لري او حل کوو یې.

څرنګه د $\sin x$ ضریب $\sqrt{3} = ctg\,\pi/6$ نو د $\sqrt{3}$ قیمت په راکړل شوې معادله کې وضع کوو او لیکو چې:

$$ctg\,\pi/6\,\sin x - \cos x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sin(x-\pi/6)}{\cos\pi/6} = \sqrt{2} \Longrightarrow \sin(x-\pi/6) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow a = \pi/4$$

نو ټولې هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له:

$x - \pi/6 = n\pi + (-1)\,\pi/4$ یا $x = n\pi + (-1)^n\,\pi/4 + \pi/6$

پنځم سوال: لاندې معادله حل کړئ:

$$2\sin x + 3\cos x = 3$$

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ او $\cos x$ قیمتونه د $tg\,x/2$ له جنبه وضع کوو، لیکو چې:

$$\frac{4\,tg\,x/2}{1+tg^2\,x/2} + \frac{3-3\,tg^2\,x/2}{1+tg^2\,x/2} - 3 = 0$$

$\Longrightarrow -6\,tg^2 x/2 + 4\,tg\, x/2 = 0$ ..... ($1+tg^2 x/2 \neq 0$ دی)

$\Longrightarrow 2\,tg\,x/2\,(3\,tg\,x/2 - 2) = 0$

$\Longrightarrow tg\,x/2 = 0$ .... I یا $tg\,x/2 = 0,6666$ II

د I لمبر معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې صفردی $n\pi$ ده ... $n\in\{0,1,2,3,\ldots\}$

د II لمبر معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې 0,6666 دی د مثلثاتی نسبتونو دجدول څخه $33^\circ\ 41'\ 12''$ په لاس راوړو .

نو هغه زاویې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$x/2 = 2n\pi \Longrightarrow x = 4n\pi$

او $x/2 = n\cdot180^\circ + 33^\circ\ 41'\ 12'' \Longrightarrow x = 2n\cdot180^\circ + 67^\circ\ 22'\ 24''$

شپږم سوال : لاندې معادله حل کړئ :

$(2+\sqrt{3})\cos x - \sin x = 1$

اوس په نوموړې معادله کې د $\cos x = \dfrac{1-tg^2 x/2}{1+tg^2 x/2}$ او $\sin x = \dfrac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2 x/2}$

وضع کوو . لیکو چې :

$\dfrac{(2+\sqrt{3})(1-tg^2 x/2)}{1+tg^2 x/2} - \dfrac{2\,tg\,x/2}{1+tg^2 x/2} = 1$

څرنګه چې $1+tg^2 x/2$ همیشه د صفر خلاف دی نو د پاسنۍ معادلې دواړه خواوې په $1+tg^2 x/2$ کې ضربوو .

$\Longrightarrow (2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\,tg^2 x/2 - 2\,tg\,x/2 = 1 + tg^2 x/2$

$\Longrightarrow (2+\sqrt{3})\,tg^2 x/2 + 2\,tg\,x/2 + tg^2 x/2 + 1 - 2 - \sqrt{3} = 0$

$\Longrightarrow (3+\sqrt{3})\,tg^2 x/2 + 2\,tg\,x/2 - (1+\sqrt{3}) = 0$

$\Delta' = 1 + (3+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 1 + 3 + \sqrt{3}\cdot3 + \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$

$= (2)^2 + 2\cdot2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \Longrightarrow (tg\,x/2)_1 = \dfrac{-1+2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

دریم سوال: ثبوت کړئ چې:

$$\sin^3 A + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$$

حل: دپورتنی مطابقت چپ اړخ د $a^3 + b^3$ شکل لري. څرنګه چې

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$ منولیکلای شو چې:

$$\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(\sin^2 a + \cos^2 a - \sin a \cos a)$$

$$= (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$$

څکه چې: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

څلورم سوال: ثبوت کړئ چې: $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2\sin^2 a \cdot \cos^2 a$

حل: دپورتني مطابقت چپ اړخ د a^4+b^4 شکل لري. څرنګه چې

$a^4+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2+2a^2b^2-2a^2b^2$ منولیکلای شو چې:

$$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a)^2 + (\cos^2 a)^2 + 2\sin^2 a \cos^2 a - 2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = (1)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a$$

$$= 1 - 2\sin^2 a \cos^2 a$$

پنځم سوال: ثبوت کړئ چې: $\dfrac{\sin a}{1+\cos a} + \dfrac{1+\cos a}{\sin a} = 2\operatorname{cosec} a$

حل: څرنګه چې دراکړل شوی مطابقت چپ اړخ ددوه کسرونو دجمعې شکل

ري، منولیکو چې:

$$\frac{\sin a}{1+\cos a} + \frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{\sin^2 a + (1+\cos a)^2}{\sin a(1+\cos a)}$$

$$= \frac{\sin^2 a + 1 + 2\cos a + \cos^2 a}{\sin a(1+\cos a)} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a + 1 + 2\cos a}{\sin a(1+\cos a)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos a}{\sin a(1+\cos a)} = \frac{2(1+\cos a)}{\sin a(1+\cos a)} = 2\operatorname{cosec} a$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow tg\, x/2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow x/2 = \pi/6$$

یا $tg\, x/2 = \frac{-1-2-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = -1 \Longrightarrow x/2 = 3\pi/4$

نو ټولې هغه زاويې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له :

$$x/2 = n\pi + \pi/6 \Longrightarrow x = 2n\pi + \pi/3$$

یا $x/2 = n\pi + 3\pi/4 \Longrightarrow x = 2n\pi + 3\pi/2$

اووم سوال : آیا دغه معادله د حل وړ ده، دلیل یې راوړئ ؟

$$\sin x - \cos x = 5$$

حل : د پورتنۍ معادلې د حل د امکان شرط لټوو. څرنګه $25 \not< (1)^2+(1)^2$

نو ویلای شو چې نوموړې معادله د حل وړ نه ده.

اتم سوال ، آیا دا لاندې معادله حل لري ؟

$$2\cos x + \sin x = 4$$

څرنګه چې $(4)^2 \not< (2)^2 + (1)^2$ نو ویلای شو چې راکړل شوې معادله حل نلري.

نهم سوال : لاندې معادله حل کړئ ؟

$$3\sin x + 2\cos x = 2$$

حل : پورتنۍ معادله حل لري ځکه چې $(2)^2 < (2)^2 + (3)^2$ ، د $\sin x$

او $\cos x$ قیمتونه د $tg\, x/2$ له جنسه په راکړل شوې معادله کې وضع کوو، لیکو چې:

$6\, tg\, x/2 + 2 - 2\, tg^2 x/2 = 2 + 2\, tg^2 x/2 \quad \ldots$ (ځکه چې $0 \neq 1 + tg^2 x/2$)

$4\, tg^2 x/2 - 6\, tg\, x/2 = 0$ یا $2\, tg^2 x/2 - 3\, tg\, x/2 = 0$

$$\Longrightarrow tg\, x/2\, (2\, tg\, x/2 - 3) = 0$$

$\Longrightarrow tg\, x/2 = 0 \ldots I$ یا $tg\, x/2 = 1,5000 \ldots II$

د I لمبر معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې صفر دی $n\pi$ ده ... $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$

د II لمبر معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې 5000 را دی دمثلثاتي لنسبتونو دجدول څخه $56^\circ\ 18'\ 53''$ په لاس راوړو.

نو هغه زاویې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له:

$$\frac{x}{2} = n\pi \implies x = 2n\pi$$

یا $\frac{x}{2} = n \cdot 180^\circ + 56^\circ\ 18'\ 53'' \implies x = 2n \cdot 180^\circ + 112^\circ\ 37'\ 46''$

لسم سوال: دلاندې معادلې جذرونه تعین کړئ؟

$$\cos x - \sqrt{3}\ \sin x = 1$$

حل: دنوموړې معادلې اطراف په $\sqrt{3}$ تقسیموو:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پوهیږو چې $\frac{1}{\sqrt{3}} = tg\,\frac{\pi}{6}$ نو په نوموړې معادله کې د $\frac{1}{\sqrt{3}}$ قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$$tg\,\frac{\pi}{6} \cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{6} \cos x - \cos\frac{\pi}{6} \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2} \implies \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \implies x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

نو ټولې هغه زاویې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له:

$$x = n\pi + (-1)^n\ \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$$

یوولسم سوال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$2\cos x = 1 - \sin x$$

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ او $\cos x$ قیمتونه د $tg\,x$ له جنسه وضع کوو لیکو چې:

$$2 \cdot \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} + \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

$$2 - 2\,tg^2\frac{x}{2} + 2\,tg\frac{x}{2} - 1 - tg^2\frac{x}{2} = 0 \quad \dots \left(1 + tg^2\frac{x}{2} \neq 0\right)$$

$3 tg^2 \frac{x}{2} - 2 tg \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow (tg \frac{x}{2} - 1)(3 tg \frac{x}{2} + 1) = 0$

$\Rightarrow tg \frac{x}{2} = 1 \ldots I \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$ یا $tg \frac{x}{2} = -0,3333 \ldots II$

د I لسمبر معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې یو دی $\frac{\pi}{4}$ ده. او د II لمبر معادلې

څخه هغه زاویه چې tg یې $0,3333$ دی د مثلثاتي لنسبتونو دجدول څخه په لاس راوړ

نو ټولې هغه زاوېې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له:

$\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4}$ یا $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

دتمرین په دول یې امتحان کړئ.

دولسم سوال: لاندې معادله حل کړئ؟

$\sin 2x = \cos 2x$

حل: راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو: $\sin 2x - \cos 2x = 0$

په لاس راغلې معادله کې د $tg \frac{3\pi}{4} = -1$ قیمت وضع کوو، لیکو چې:

$tg \frac{3\pi}{4} \cos 2x + \sin 2x = 0$

$\sin \frac{3\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{3\pi}{4} \sin 2x = 0 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 0$

څرنګه چې: $0 = \sin(n\pi)$ نو $\alpha = n\pi$

$n \in IN \cup \{0\}$

پس ټولې هغه زاوېې چې دراکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له،

$2x + \frac{3\pi}{4} = n\pi + (-1)^n n\pi \Rightarrow 2x = n\pi + (-1)^n n\pi - \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}[n\pi + (-1)^n n\pi - \frac{3\pi}{4}]$

دیارلسم سوال: دغه معادله حل کړئ؟ $\sin x + 1 = \cos x$

حل: پورتنۍ معادله داسې لیکلای شو: $\cos x - \sin x = 1$

معلومه ده چې په لاس راغلې معادله کې د $\cos X$ ضریب $1 = tg\,\pi/4$ دی
نو دنوموړي ضریب پرځا $tg\,\pi/4$ وضع کوو، یعنې:

$tg\,\pi/4 \cos X - \sin X = 1$ یا $\sin \pi/4 \cos X - \cos \pi/4 \sin X = \cos \pi/4$

$\Rightarrow \sin(\pi/4 - X) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow -\sin(X - \pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin(X - \pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

څرنګه چې $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{5\pi}{4}$ نو $a = \frac{5\pi}{4}$

پس ټولې حقه زاویې چې راکړل شوې معادله تصدیقوي دادي:

$X - \pi/4 = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}$ یا $X = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4} + \pi/4$

څوارلسم سوال: دلاندې معادلې جذرونه تعین کړئ؟

$4\sqrt{3} \cos X - 2 \sin X = 5$

حل: په نوموړې معادله کې د $\cos X$ او $\sin X$ قیمتونه وضع کوو یعنې:

$4\sqrt{3} \cdot \frac{1 - tg^2 X/2}{1 + tg^2 X/2} - 2 \cdot \frac{2\, tg\, X/2}{1 + tg^2 X/2} = 5$

دنوموړې معادلې اطراف په $1 + tg^2 X/2$ کې ضربوو:

$\Rightarrow 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\, tg^2 X/2 - 4\, tg\, X/2 = 5 + 5\, tg^2 X/2$

$\Rightarrow (5 + 4\sqrt{3})\, tg^2 X/2 + 4\, tg\, X/2 + 5 - 4\sqrt{3} = 0$

$\Delta = 4 - (25 - 16 \cdot 3) = 27 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 3\sqrt{3}$

$tg\, X/2 = \frac{-2 + 3\sqrt{3}}{5 + 4\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\, X/2 = \frac{(-2 + 3\sqrt{3})\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}}{(5 + 4\sqrt{3})\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}}$

$= \frac{\frac{-2 + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\,\sqrt{3} - 1}{\frac{5 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}\,\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 7}{\sqrt{3} + 7} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

پوهېږو چې : $\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Longleftarrow a = \frac{\pi}{12}$

نو ټولې هغه زاويې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دی له :

$X = n\pi + \frac{\pi}{12}$ يا $X = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$

شپاړسم سوال : لاندې معادله حل کړئ ؟ $\sqrt{3}\sin X + \cos X = 0$

حل : په نوموړې معادله کې د $\sin X$ د ضريب قيمت $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ وضع کوو ، ليکو چې

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} \sin X + \cos X = 0 \Longrightarrow \sin X \cos \frac{\pi}{6} + \cos X \sin \frac{\pi}{6} = 0 \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow \sin X \cos \frac{\pi}{6} + \cos X \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Longrightarrow \sin(X + \frac{\pi}{6}) = 0$$

څرنګه چې $\sin(n\pi) = 0$ ، $n \in IN \cup \{0\}$ نو $a = n\pi$

پس ټولې هغه زاويې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی هغه دادی :

$X + \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n n\pi$ يا $X = n\pi + (-1)^n n\pi - \frac{\pi}{6}$

اووه لسم سوال : د لاندې معادلې جذرونه تعين کړئ ؟

$$6\sqrt{3} \sin X - 4 \cos X = 7$$

حل : د $\sin X$ او $\cos X$ قيمتونه د $\tan \frac{X}{2}$ له جنسه څخه په معادله کې وضع کوو ، ليکو چې :

$$6\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\tan \frac{X}{2}}{1+\tan^2 \frac{X}{2}} - 4 \cdot \frac{1-\tan^2 \frac{X}{2}}{1+\tan^2 \frac{X}{2}} = 7$$

$$\Longrightarrow 2 \cdot 6\sqrt{3} \tan \frac{X}{2} - 4 + 4\tan^2 \frac{X}{2} = 7 + 7\tan^2 \frac{X}{2} \cdots (1+\tan^2 \frac{X}{2} \neq 0)$$

$$\Longrightarrow 3\tan^2 \frac{X}{2} - 12\sqrt{3} \tan \frac{X}{2} + 11 = 0$$

$$\Delta = (-12\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11 = (12\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\tan \frac{X}{2} = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{(4\sqrt{3} \cdot 3)^2 - 4\sqrt{3} \cdot 11\sqrt{3}}}{6}$$

$$= \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}(9 \cdot 4\sqrt{3} - 11\sqrt{3})}}{6} = \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}(36\sqrt{3} - 11\sqrt{3})}}{6}$$

$$= \frac{12\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} \cdot 25\sqrt{3}}}{6} = \frac{12\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

پوهیږو چې $tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ نو $a = \frac{\pi}{6}$ او هغه زاویه چې tg ئې $\frac{1}{\sqrt{3}}$ دی د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه په لاس راوړو.

پس ټولې هغه زاویې چې د نوموړې معادلې جذرونه دی عبارت دي له:

$$\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{یا} \quad x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

اتلسم سوال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$3\sin x + \cos x = 1$$

حل: په راکړل شوې معادله کې د $\sin x$ او $\cos x$ قیمتونه د $tg\frac{x}{2}$ له جنسه وضع کوو لیکو چې:

$$\frac{6\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - 1 = 0$$

څرنګه چې $1+tg^2\frac{x}{2}$ همېشه د صفر خلاف دی نو:

$$-2\,tg^2\frac{x}{2} + 6\,tg\frac{x}{2} = 0 \implies tg^2\frac{x}{2} - 3\,tg\frac{x}{2} = 0$$

$$\implies tg\frac{x}{2}\left(tg\frac{x}{2} - 3\right) = 0$$

$$\implies tg\frac{x}{2} = 0 \;\ldots I \quad \text{یا} \quad tg\frac{x}{2} = 3 \;\ldots II$$

د I معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې صفر دی $n\pi$ ده ... $n \in \{0, 1, 2 \ldots\}$

د II معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې 3 دی د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه په لاس راوړو، نو هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه عبارت دي له:

$$x = 2n\pi$$

د دولسم ټولګي د مثلثاتو مربوط سوالونه

او ور تمرین

لومړی سوال: لاندې معادله حل کړئ:

$2\,tg\,x - ctg\,x = 1$

حل: په نوموړې معادله $ctg\,x = \frac{1}{tg\,x}$ وضع کوو، لیکو چې:

$2\,tg^2x - tg\,x - 1 = 0 \quad \dots \quad (tg\,x \neq 0)$

$(tg\,x - 1)(2\,tg\,x + 1) = 0$

$\Longrightarrow tg\,x = 1 \dots I$ يا $tg\,x = -0,5000 \dots II$

د I معادلې څخه هغه زاویه چې (tg) یې دی $\pi/4$ ده.

د II معادلې څخه هغه زاویه چې (tg) یې $0,5000$ دی د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه په لاس راوړو. نو هغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دی عبارت دي له: $x = n\pi + \pi/4$

دویم سوال: لاندې معادله حل کړئ؟ $\sqrt{3}\,tg\,x + ctg\,x = 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

حل: د پورتنۍ معادلې اطراف په $\sqrt{3}$ کې ضربوو، لیکو چې:

$3\,tg\,x + \sqrt{3}\,\frac{1}{tg\,x} = 3\sqrt{3} + 1 \Longrightarrow 3\,tg^2x + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,tg\,x + tg\,x \dots (tg\,x \neq 0)$

$$\Longrightarrow 3\,tg^2x-(3\sqrt{3}+1)\,tg\,x+\sqrt{3}=0$$

$$\Delta=[-(3\sqrt{3}+1)]^2-4\cdot 3\sqrt{3}=(3\sqrt{3})^2-2\cdot 3\sqrt{3}+1=(3\sqrt{3}-1)^2$$

$$\Longrightarrow (tg\,x)_1=\frac{3\cdot\sqrt{3}+1+3\sqrt{3}-1}{6}=\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow (tg\,x)_1=\sqrt{3}\quad\ldots\ldots I$$

$$(tg\,x)_2=\frac{1}{3}\Longrightarrow (tg\,x)_2=0,6666\quad\ldots\ldots II$$

د I معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې $\sqrt{3}$ دی $\pi/3$ ده . نو هغه زاویې چې د نوموړې معادلې جذرونه دي عبارت دي له : $x=n\pi+\pi/3$

د II معادلې د حل لپاره د جدول د مثلثاتي نسبتونو څخه استفاده کوو او هغه زاویه چې tg یې ۰,۶۶۶۶ دی په لاس راوړو.

دریم سوال : لاندې معادله حل کړئ :

$$4\,tg\,x+ctg\,x=-5$$

حل : پورتنی معادله داسې هم لیکلای شو چې : $4\,\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-5$

$$\Longrightarrow 4\sin^2x+\cos^2x=-5\sin x\cos x\quad\ldots\ (x\neq 0 \text{ او } x\neq \pi/2)$$

$$\Longrightarrow 3\sin^2x+1=-\frac{5}{2}\sin 2x\Longrightarrow 3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+1=-\frac{5}{2}\sin 2x$$

$$\Longrightarrow 3-3\cos 2x+2=-5\sin 2x\Longrightarrow 5\sin 2x-3\cos 2x+5=0$$

$$\Longrightarrow \frac{10\,tg\,x}{1+tg^2x}-\frac{3+3\,tg^2x}{1+tg^2x}+5=0$$

$$\Longrightarrow 8\,tg^2x+10\,tg\,x+2=0\quad\ldots\ldots\ (0<1+tg^2x \text{ ځکه چې})$$

$$\Longrightarrow \Delta=25-16=9\Longrightarrow\sqrt{\Delta}=\pm 3$$

$$(tg\,x)_1=\frac{-5+3}{8}\Longrightarrow (tg\,x)_1=-\frac{1}{4}\quad\ldots I$$

$$(tg\,x)_2=\frac{-5-3}{8}\Longrightarrow (tg\,x)_1=-1\quad\ldots II$$

د I معادلې څخه هغه زاویه چې tg یې ١- دی $3\pi/4$ ده او د II لمبر معادلې د حل لپاره دمثلثاتي نسبتونو دجدول څخه استفاده کوو او هغه زاویه چې tg یې (0,250 -) دی په لاس راوړو. نوهغه زاویې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له: $x = n\pi + 3\pi/4$

شلورم سوال: لاندې معادله حل کړئ:

$$tgx + 2\,ctgx = 7$$

حل: راکړل شوې معادله داسې لیکو چې:

$$tg^2x - 7\,tgx + 2 = 0 \quad \ldots\ (tgx \neq 0)$$

$$\Delta = 41 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 6{,}403$$

$$\Rightarrow (tgx)_1 = \frac{7+6{,}404}{2} \Rightarrow (tgx)_1 = 6{,}7020 \quad \ldots\ I$$

$$= 6{,}7020 \Rightarrow (tgx)_2 = 0{,}2980 \quad \ldots\ II$$

د I او II لمبر معادلو د حل لپاره دمثلثاتي نسبتونو دجدول څخه استفاده کوو. $(tgx)_2 = 0{,}2980$

پنځم سوال: د لاندې معادلې جذرونه تعین کړئ:

$$5\,tgx - ctgx = 1$$

حل: پورتنۍ معادله په هغه صورت کې چې $tgx \neq 0$ داسې لیکلای شو:

$$5\,tg^2x - tgx - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 20 = 21 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4{,}583$$

$$\Rightarrow (tgx)_1 = \frac{1+4{,}583}{10} = \frac{5{,}5836}{10}$$

$$\Rightarrow (tgx)_1 = 0{,}5583 \quad \ldots\ I$$

$$(tgX)_2 = \frac{1-4,583}{10} = -0,3583$$

$$(tgX)_2 = -0,3583 \quad \ldots\ldots II$$

د I او II لمبر معادلو د حل دپاره د مثلثاتي نسبتونو د جدول څخه استفاده کوو .

شپږم سوال : لاندې معادله حل کړئ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\, tgX + \sqrt{3}\, Cotg X = 2$$

حل : په پورتنۍ معادله کې $Cotg\,X$ مساوي $\frac{1}{tgX}$ وضع کوو ، لیکو چې :

$$tg^2 X - 2\sqrt{3}\, tg X + (\sqrt{3})^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (tg X \neq 0)$$

$$\Longrightarrow (tg X - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Longrightarrow tg X = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow a = \pi/3$$

نو متولې هغه زاويې چې د راکړل شوې معادلې جذرونه دي عبارت دي له :

$$X = n\pi + \pi/3$$

اووم سوال : د لاندې معادلې جذرونه تعين کړئ :

$$2\,Sin^2 X + Cos^2 X - 2\,Sin X\, Cos X = 1$$

حل : راکړل شوې معادله داسې هم لیکلای شو :

$$1 + Sin^2 X - Sin\,2X = 1 \quad \Longrightarrow Sin^2 X - Sin\,2X = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1 - Cos\,2X}{2} - Sin\,2X = 0 \quad \Longrightarrow 1 - Cos\,2X - 2\,Sin\,2X = 0$$

$$\Longrightarrow Cos\,2X + 2\,Sin\,2X - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \frac{1-tg^2X}{1+tg^2X} + \frac{4\,tgX}{1+tg^2X} - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 1 - tg^2X + 4\,tgX - 1 - tg^2X = 0 \quad \Longrightarrow 2\,tg^2X - 4\,tgX = 0$$

$$\Longrightarrow tgX\,(2\,tgX - 4) = 0$$

$tg X = 0$ یا $tg X = 2$

$$tg X = 0 \quad \Longrightarrow a = n\pi$$

شپږم سوال: ثبوت کړئ چې: $\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}=\sec a-tg\,a$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ صورت او مخرج په $1-\sin a$ کې ضربوو، نو لیکو چې:

$$\sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}=\sqrt{\frac{(1-\sin a)(1-\sin a)}{(1+\sin a)(1-\sin a)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\sin a)^2}{1-\sin^2 a}}=\sqrt{\frac{(1-\sin a)^2}{\cos^2 a}}=\sqrt{\left(\frac{1-\sin a}{\cos a}\right)^2}$$

$$=\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{1}{\cos a}-\frac{\sin a}{\cos a}=\sec a-tg\,a$$

اووم سوال:

ثبوت کړئ چې: $\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a-1}+\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a+1}=2\sec^2 a$

حل: د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ د دوو کسرونو د جمعې شکل لري لیکو:

$$\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a-1}+\frac{\operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} a+1}=\frac{\operatorname{cosec} a(1+\operatorname{cosec} a)+\operatorname{cosec} a(\operatorname{cosec} a-1)}{\operatorname{cosec}^2 a-1}$$

$$=\frac{\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec}^2 a+\operatorname{cosec}^2 a-\operatorname{cosec} a}{\frac{1}{\sin^2 a}-1}$$

$$=\frac{2\operatorname{cosec}^2 a}{\frac{1-\sin^2 a}{\sin^2 a}}=\frac{2\operatorname{cosec}^2 a}{\frac{1}{\sin^2 a}\cdot\cos^2 a}=\frac{2\operatorname{cosec}^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a}\cdot\frac{1}{\cos^2 a}$$

$$=2\sec^2 a$$

اتم سوال: ثبوت کړئ چې: $tg\,a+cotg\,a=\sec a\cdot\operatorname{cosec} a$

حل: څرنګه چې $cotg\,a=\frac{1}{tg\,a}$، نو د راکړل شوی مطابقت چپ اړخ نه لیکلای شو چې:

$$tg\,a+cotg\,a=tg\,a+\frac{1}{tg\,a}$$

$$=\frac{1+tg^2 a}{tg\,a}=\frac{1}{tg\,a}\cdot(1+tg^2 a)=cotg\,a\cdot\sec^2 a$$

$$=\frac{\cos a}{\sin a}\cdot\frac{1}{\cos^2 a}=\frac{1}{\cos a}\cdot\frac{1}{\sin a}=\sec a\cdot\operatorname{cosec} a$$

دیولسم اودولسم ټولګیو

دمثلثاتو تمرینونو حل

مُصنّف

واحد ګل (مملہ وال)

کال ۱۳۶۷ حوت

ناشر

تاج محل کمپنی ڈھکی منورشاه

بازار قصه خوانی پشاور

دیولسم اودولسم ټولګیو

دمثلثاتو تمرینونوحل

مُصنّف

واحدګل املهوال

PROPERTY OF ACKU

کال ۱۳۶۷ حوت

ناشر

تاج محل کمپنی ډهکی منورشاه
بازارقصه خوانی پشاور

حق چهاپ محفوظ مصنّف

نام کتاب : دمثلثاتو تمرینونو حل
مصنّف : واحد گل (مملہ وال)
اشاعت : کال ۱۳۶۷ حوت
قیمت : ۱۵ - روپے
ناشر : تاج محل کمپنی پشاور

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

سریزه

درنو لوستونکو! له کوم وخت څخه راهیسې چې زه د ریاضیاتو سره سروکار لرم، را ته ثابته شوېده چې زمونږ زده کوونکي د مسائلو او تمرینونو په حل کې تل د ستونځو سره مخامخ شوي دي. ځکه له یوې خوا د غلام او دهري حکومت له لاسه افغاني شاګردان په داسې شرایطو کې ژوند تېروي چې درسي کتاب او کتابتون ته یې لاس نه رسي او هم په خپل شا وخوا کې په آساني سره داسې څوک نشي موندلای ددې یې ورله ځوان نسل سره لازمه علمي همکاري وکړي. نو د پورتنیو علتونو له کبله ما تصمیم ونیو، چې ترڅو دیوولسمو او دولسمو ټولګیو د مثلثاتو مسئلې حل او په یوه کتاب کې راغونډې کړم.

د لوی خدای ج څخه شکر ادا کوونکی یم چې ماته یې ددې مجموعې دتدوین او ترتیب توفیق راکړ، او هیله لرم چې ددې مجموعې چاپ او نشر په دین او وطن مینو مجاهدو افغانانو د بچیو د سالمې روزنې او د دوی د درسي ستونځو د لرې کولو لپاره ګټور ثابت شي، او د محترمو لوستونکو څخه هیله لرم چې د دې کتاب نیمګړتیاوې د خپلو اصلاحي نظریاتو سره یوځای مونږ ته په ګوته کړي، ترڅو په راتلونکي کې ورته پام وشي. (ومن الله التوفیق)

واحد ګل د صدیق اکبر رض د لیسې ښوونکی